

Univerza  
v Ljubljani Fakulteta  
za elektrotehniko



# ZVEZNI REGULACIJSKI SISTEMI II. del

Založba  
FE in FRI

## BORUT ZUPANČIČ



Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za elektrotehniko

# **ZVEZNI REGULACIJSKI SISTEMI**

II. del

Borut Zupančič

Ljubljana 2010

---

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

681.5.01(075.8)(0.034.2)

ZUPANČIČ, Borut, 1952-  
Zvezni regulacijski sistemi [Elektronski vir] / Borut Zupančič;  
izdajatelj Fakulteta za elektrotehniko. -2.popravljena in dopolnjena izd.  
El. knjiga. - Ljubljana: Fakulteta za elektrotehniko, 2010

Način dostopa (URL):

<http://mcs.fe.uni-lj.si/Download/Zupancic/ZRS1.pdf>

<http://mcs.fe.uni-lj.si/Download/Zupancic/ZRS2.pdf>

ISBN 978-961-243-162-4 (Fakulteta za elektrotehniko, zv. 1)

ISBN 978-961-243-163-1 (Fakulteta za elektrotehniko, zv. 2)

254219520

---

Copyright ©2010 Založba FE in FRI. All rights reserved. Razmnoževanje (tudi fotokopiranje) dela v celoti ali po delih brez predhodnega dovoljenja Založbe FE in FRI prepovedano.

Založnik: Založba FE in FRI, Ljubljana

Izdajatelj: UL Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana

Urednik: mag. Peter Šega

Recenzenta: prof.dr. Rihard Karba, dr. Gorazd Karer

2.popravljena in dopolnjena izdaja

## ***Predgovor***

*Učbenik Zvezni regulacijski sistemi - II. del predstavlja nadaljevanje učbenika Zvezni regulacijski sistemi - I. del in zaokroža tematiko, ki jo smatramo kot osnovo pri razumevanju regulacijskih sistemov. Zato je potrebno za dobro razumevanje ob ustreznem predznanju iz matematike, fizike in teorije sistemov poznati tudi tematiko prvega učbenika. Medtem ko temelji I. del pretežno na analizi in načrtovanju v časovnem prostoru, obravnavamo v II. delu predvsem metode analize in načrtovanja regulacijskih sistemov v frekvenčnem prostoru. Čeprav te metode smatramo za t.i. klasične metode, pa so z razvojem sodobnih paketov za računalniško podprto načrtovanje (predvsem MATLAB z različnimi dodatki - Toolbox) postale bistveno bolj uporabne. Brez računalniških orodij so bili namreč postopki izredno dolgotrajni, često pa predvsem pri grafičnih metodah tudi zelo ne-natančni. V drugem delu pa obravnavamo metode analize in načrtovanja v prostoru stanj. Te sodobne metode so se začele uporabljati po letu 1960. Primerne so tudi na področjih multivariabilnih, nelinearnih in časovno spremenljivih sistemov. Metode so izjemno primerne za programiranje na digitalnih računalnikih in so vgrajene v večini paketov za računalniško podprto načrtovanje sistemov vodenja.*

*Delo je razdeljeno na pet poglavij. Ker predstavlja nadaljevanje I. dela, smo se izognili uvodnemu poglavju. Prvo poglavje obravnava analizo regulacijskih sistemov s pomočjo diagrama lege korenov. Razen analize enostavnejših sistemov opisujemo tudi zahtevnejše probleme, kot na primer diagram lege korenov sistemov z neminimalno fazo in sistemov z mrtvim časom. Poglavje zaključujemo z obravnavo konturnega diagrama.*

*V drugem poglavju obravnavamo metode, ki temeljijo na poznavanju frekvenčne karakteristike sistema. Opisali smo Bodejev diagram, polarni diagram in Nicholsov diagram. Obravnavamo pa tudi absolutno in relativno stabilnost regulacijskih sistemov s pomočjo Nyquistovega diagrama ter s pomočjo ojačevalnega in faznega razločka. V zadnjem delu pa smo obravnavali frekvenčno karakteristiko zaprtostnega sistema.*

*Tretje poglavje je namenjeno kompenzacijskim metodam za načrtovanje regulacijskih sistemov. Podali smo metode prehitevalne, zakasnilne in prehitevalno - za-*

*kasnilne kompenzacije s pomočjo diagrama lege korenov in s pomočjo Bodejevega diagrama. Prikazali smo tudi povezavo med kompenzacijskimi in PID regulatorji.*

*V četrtem poglavju obravnavamo metode analize regulacijskih sistemov v prostoru stanj. V prvem delu smo na kratko podali nekatere osnove, ki naj bi bile znane iz poznavanja teorije sistemov. Uvedli smo pojem trajektorije, faznega portreta in singularne točke. Nato smo obdelali metodo Ljapunova za določitev stabilnosti linearnih in nelinearnih sistemov. V drugem delu pa smo se osredotočili na pomembnejše kanonične oblike in na nekatere pomembne pojme v načrtovalnih postopkih, kot sta na primer vodljivost in spoznavnost.*

*Peto poglavje pa je uvod v načrtovalne postopke v prostoru stanj. Tako kot v prejšnjih poglavjih smo se tudi tu omejili na sisteme z enim vhodom in enim izhodom. Obdelali smo nekatere metode za določitev regulatorjev stanj in observatorjev ob predpisanih legah želenih polov.*

*Področje, ki ga obravnava učbenik, ima izjemno dolgo tradicijo, zato je na voljo veliko literature. Najprimernejše knjige smo navedli v Literaturi.*

*Primere v učbeniku smo izvedli s programskim paketom MATLAB-Simulink.*

*Na koncu se zahvaljujem sodelavcem Laboratorija za modeliranje, simulacijo in vodenje in Laboratorija za avtonomne mobilne sisteme, saj so veliko pripomogli k nastanku tega dela. Posebno zahvalo pa sem dolžan Milanu Simčiču, dipl. ing. za vestno opravljeno urejanje v okolju L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X in za risanje slik s pomočjo paketa CorelDraw.*

*Delo naj obuja tudi spomin na mentorja prof. dr. F. Bremšaka, dolgoletnega predstojnika laboratorija in velikega strokovnjaka prav za tematiko, ki jo predstavlja učbenik.*

*Ljubljana, oktober 2010*

*Borut Zupančič*

# Kazalo

|          |                                                                                      |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Metoda diagrama lege korenov</b>                                                  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Pogoj absolutne vrednosti in kotni pogoj . . . . .                                   | 2         |
| 1.2      | Diagram lege korenov sistema 2. reda . . . . .                                       | 5         |
| 1.3      | Pravila za risanje diagrama lege korenov . . . . .                                   | 7         |
| 1.4      | Posebni primeri diagramov lege korenov . . . . .                                     | 30        |
| 1.4.1    | Risanje diagrama lege korenov, če parameter ni multiplika-<br>tivni faktor . . . . . | 30        |
| 1.4.2    | Diagram lege korenov pogojno stabilnega sistema . . . . .                            | 33        |
| 1.4.3    | Diagram lege korenov sistema z neminimalno fazo . . . . .                            | 35        |
| 1.4.4    | Diagram lege korenov sistema z mrtvim časom . . . . .                                | 36        |
| 1.4.5    | Konturni diagram lege korenov . . . . .                                              | 41        |
| <b>2</b> | <b>Analiza regulacijskih sistemov v frekvenčnem prostoru</b>                         | <b>45</b> |
| 2.1      | Frekvenčna karakteristika dinamičnega sistema . . . . .                              | 46        |
| 2.2      | Bodejev diagram . . . . .                                                            | 52        |
| 2.2.1    | Bodejevi diagrami osnovnih členov . . . . .                                          | 52        |
| 2.2.2    | Značilnosti fazno minimalnih in fazno neminimalnih sistemov                          | 66        |
| 2.2.3    | Določitev prenosne funkcije iz Bodejevega diagrama . . . . .                         | 69        |
| 2.2.4    | Določitev konstant pogreškov iz Bodejevega diagrama . . . . .                        | 72        |

|          |                                                                    |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3      | Polarni diagram . . . . .                                          | 74         |
| 2.3.1    | Polarni diagrami osnovnih členov . . . . .                         | 75         |
| 2.3.2    | Splošne značilnosti polarnih diagramov . . . . .                   | 84         |
| 2.4      | Nicholsov diagram . . . . .                                        | 88         |
| 2.5      | Stabilnost regulacijskih sistemov . . . . .                        | 91         |
| 2.5.1    | Nyquistov stabilnostni kriterij . . . . .                          | 91         |
| 2.5.2    | Relativna stabilnost . . . . .                                     | 112        |
| 2.6      | Frekvenčna karakteristika zaprtozančnega sistema . . . . .         | 119        |
| 2.6.1    | Preslikava polarnega diagrama - M in N krogi . . . . .             | 120        |
| 2.6.2    | Preslikava Nicholsovega diagrama . . . . .                         | 128        |
| 2.7      | Pokazatelji kvalitete regulacije v frekvenčnem prostoru . . . . .  | 131        |
| <b>3</b> | <b>Kompenzacijske metode za načrtovanje regulacijskih sistemov</b> | <b>135</b> |
| 3.1      | Osnove kompenzacijskih metod . . . . .                             | 135        |
| 3.2      | Prehitevalna kompenzacija . . . . .                                | 144        |
| 3.2.1    | Prehitevalni kompenzacijski regulator . . . . .                    | 144        |
| 3.2.2    | Prehitevalna kompenzacija s pomočjo diagrama lege korenov          | 146        |
| 3.2.3    | Prehitevalna kompenzacija s pomočjo Bodejevega diagrama            | 155        |
| 3.2.4    | <b>PD regulator</b> . . . . .                                      | 163        |
| 3.3      | Zakasnilna kompenzacija . . . . .                                  | 164        |
| 3.3.1    | Zakasnilni kompenzacijski regulator . . . . .                      | 164        |



|          |                                                                                  |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.2    | Zakasnilna kompenzacija s pomočjo diagrama lege korenov                          | 165        |
| 3.3.3    | Zakasnilna kompenzacija s pomočjo Bodejevega diagrama .                          | 172        |
| 3.3.4    | <b>PI</b> regulator . . . . .                                                    | 178        |
| 3.4      | Prehitevalno - zakasnilna kompenzacija . . . . .                                 | 179        |
| 3.4.1    | Prehitevalno-zakasnilni kompenzacijski regulator . . . . .                       | 179        |
| 3.4.2    | Prehitevalno - zakasnilna kompenzacija s pomočjo diagrama lege korenov . . . . . | 181        |
| 3.4.3    | Prehitevalno - zakasnilna kompenzacija s pomočjo Bodejevega diagrama . . . . .   | 194        |
| 3.4.4    | <b>PID</b> regulator . . . . .                                                   | 199        |
| <b>4</b> | <b>Analiza sistemov v prostoru stanj</b>                                         | <b>205</b> |
| 4.1      | Odziv linearnega časovno nespremenljivega sistema . . . . .                      | 206        |
| 4.2      | Računanje matrike prehajanja stanj . . . . .                                     | 209        |
| 4.3      | Trajektorije v prostoru stanj . . . . .                                          | 213        |
| 4.4      | Ravnotežne točke . . . . .                                                       | 218        |
| 4.5      | Določevanje stabilnosti po metodi Ljapunova . . . . .                            | 222        |
| 4.6      | Transformacija spremenljivk stanj . . . . .                                      | 228        |
| 4.7      | Kanonične oblike . . . . .                                                       | 229        |
| 4.7.1    | Vodljivostna kanonična oblika . . . . .                                          | 230        |
| 4.7.2    | Spoznavnostna kanonična oblika . . . . .                                         | 232        |
| 4.7.3    | Diagonalna in Jordanova kanonična oblika . . . . .                               | 234        |

|          |                                                                               |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.7.4    | Transformacija sistema v diagonalno kanonično obliko . . .                    | 240        |
| 4.7.5    | Transformacija sistema v Jordanovo kanonično obliko . . .                     | 243        |
| 4.8      | Vodljivost in spoznavnost sistemov . . . . .                                  | 248        |
| 4.8.1    | Vodljivost sistemov . . . . .                                                 | 248        |
| 4.8.2    | Transformacija sistema v vodljivostno kanonično obliko . .                    | 253        |
| 4.8.3    | Spoznavnost sistemov . . . . .                                                | 255        |
| 4.8.4    | Transformacija sistema v spoznavnostno kanonično obliko .                     | 258        |
| <b>5</b> | <b>Načrtovanje regulacijskih sistemov v prostoru stanj</b>                    | <b>261</b> |
| 5.1      | Regulator za premikanje polov . . . . .                                       | 263        |
| 5.1.1    | Metoda izenačitve dejanskega in želenega karakterističnega polinoma . . . . . | 264        |
| 5.1.2    | Metoda s pomočjo vodljivostne kanonične oblike . . . . .                      | 266        |
| 5.1.3    | Metoda s pomočjo Ackermann-ove formule . . . . .                              | 270        |
| 5.2      | Observator stanj . . . . .                                                    | 277        |
| 5.2.1    | Metoda izenačitve dejanskega in želenega karakterističnega polinoma . . . . . | 279        |
| 5.2.2    | Metoda s pomočjo spoznavnostne kanonične oblike . . . .                       | 280        |
| 5.2.3    | Metoda s pomočjo Ackermann-ove formule . . . . .                              | 283        |
|          | <b>Literatura</b>                                                             | <b>285</b> |

# 1.

## Metoda diagrama lege korenov

Osnovne karakteristike prehodnega pojava v zaprtozančnem regulacijskem sistemu so tesno povezane z lego zaprtozančnih polov. Pri najpogostejše uporabljenem  $P$  regulatorju lega zaprtozančnih polov seveda zavisi od proporcionalnega območja regulatorja oz. njegovega ojačenja. Za načrtovalca regulacijskega sistema je zelo pomembno, da spozna, kako se lege zaprtozančnih polov oz. korenov karakteristične enačbe premikajo v  $s$  ravnini pri spreminjanju ojačenja. Včasih je možno že s pravilno izbiro ojačenja doseči želeno lego polov in s tem zadovoljiv prehodni pojav.

Določitev polov zaprtozančnega sistema oz. korenov karakteristične enačbe pa je za višje rede težak in zamuden postopek, ki ponavadi zahteva uporabo računalnika. Razen tega ima izračun lege korenov omejeno vrednost, saj načrtovalca zanima potek lege korenov pri spreminjajočih parametrih (ponavadi regulatorja) in je torej treba računalniški postopek ponavljati.

Učinkovit in enostaven postopek, ki omogoča narisati potek korenov v  $s$  ravnini v odvisnosti od systemskega parametra, je razvil W. R. Evans in se imenuje *diagram lege korenov (DLK)*. Čeprav lahko z metodo analiziramo vpliv katerega koli parametra odprtozančne prenosne funkcije, pa je ta parameter običajno ojačenje, ki se spreminja od nič do neskončno.

Metoda DLK se veliko uporablja na področju analize in načrtovanja vodenja sistemov. Vgrajena je tudi v vsakem boljšem paketu CACSD (Computer Aided Control System Design - računalniško podprto načrtovanje sistemov vodenja). Vendar so izkušnje, ki jih dobimo pri "ročnem" risanju DLK izjemno pomembne

pri pravilni interpretaciji rezultatov, ki jih daje računalniški paket.

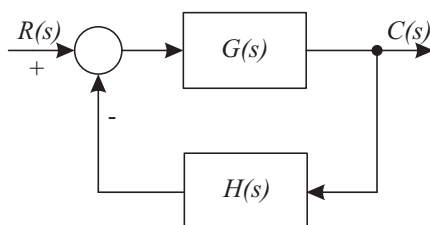
Pristop, ki ga bomo obravnavali, je uporaben za risanje

- diagrama lege korenov, ko se sistemski parameter (običajno ojačenje  $K$  spreminja od 0 do  $\infty$ ),
- komplementarnega diagrama lege korenov, ko se sistemski parametri spreminjajo od  $-\infty$  do 0,
- konturnega diagrama, ko se spreminja več različnih parametrov.

Komplementarni diagram lege korenov se na področju regulacijskih sistemov manj uporablja, saj moramo običajno zagotoviti pozitivno ojačenje.

## 1.1 Pogoj absolutne vrednosti in kotni pogoj

Slika 1.1 prikazuje osnovno konfiguracijo regulacijskega sistema.



Slika 1.1: Regulacijski sistem

Sistem ima karakteristično enačbo

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (1.1)$$

oz.

$$G(s)H(s) = -1 \quad (1.2)$$

Ker je enačba (1.2) kompleksna, jo lahko razdelimo v dve enačbi. Prva enačba določa **pogoj absolutne vrednosti**

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (1.3)$$

Druga enačba pa določa **kotni pogoj**

$$\angle[G(s)H(s)] = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

*Vrednosti  $s$ , ki zadovoljijo pogoj absolutne vrednosti in kotni pogoj, so koreni karakteristične enačbe oz. zaprtozančni poli in ležijo na diagramu lege korenov.*

Metoda DLK torej temelji na izračunu absolutne vrednosti in kota odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  in daje informacijo o legi zaprtozančnih polov. Postopek lahko razdelimo v dva bistvena dela:

- V  $s$  ravnini določimo vse točke, ki zadovoljijo kotnemu pogoju. Le-te sestavljajo DLK.
- S pomočjo pogoja absolutne vrednosti določimo vrednost sistemskega parametra (ojačenja) v določeni točki DLK.

Za risanje DLK pri spremenljivem ojačenju izhajamo iz odprtozančne prenosne funkcije v faktorizirani obliki

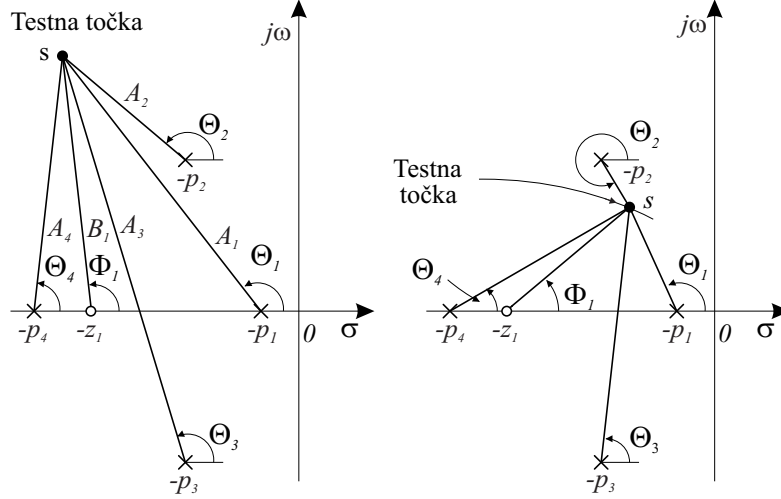
$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (1.5)$$

Pri tem naj omenimo, da uporaba izraza ojačenje v tem primeru ni dosledna, saj je pravo ojačenje odprtozančne prenosne funkcije  $G(0)H(0) = \frac{Kz_1z_2\dots z_m}{p_1p_2\dots p_n}$  in je  $K$  dejansko multiplikativni faktor faktorizirane oblike.

Postopek risanja DLK začnemo tako, da vrišemo odprtozančne pole in ničle v ravnino  $s$ . Neka testna točka  $s$  pripada DLK, če izpolnjuje kotni pogoj. Le-tega lahko preverimo analitično, običajno pa to naredimo na grafični način. Če ima odprtozančna prenosna funkcija obliko

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)} \quad (1.6)$$

dobimo kot  $\angle[G(s)H(s)]$  v neki testni točki  $s$  tako, da potegnemo povezave iz testne točke  $s$  do vseh polov in ničel in označimo ustrezne kote  $\Phi_1, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ , kot prikazuje slika 1.2.



Slika 1.2: Določitev kotnega pogoja in absolutne vrednosti funkcije  $G(s)H(s)$

S  $\Phi_i$  označimo kote v ničlah, s  $\Theta_i$  pa kote v polih. Kot prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  v točki  $s$  določimo s pomočjo izraza

$$\begin{aligned}\angle[G(s)H(s)] &= \angle[s + z_1] - \angle[s + p_1] - \angle[s + p_2] - \angle[s + p_3] - \angle[s + p_4] \\ &= \Phi_1 - \Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3 - \Theta_4\end{aligned}\quad (1.7)$$

Absolutno vrednost prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  v točki  $s$  lahko določimo analitično, vendar pri DLK običajno uporabimo grafični postopek. Označimo z  $A_1, A_2, A_3$  in  $A_4$  ter z  $B_1$  dolžine kompleksorjev  $s + p_1, s + p_2, s + p_3, s + p_4$  ter  $s + z_1$ , kakor je označeno na sliki 1.2. Absolutna vrednost se potem določi iz izmerjenih dolžin

$$|G(s)H(s)| = \frac{K|s + z_1|}{|s + p_1||s + p_2||s + p_3||s + p_4|} = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}\quad (1.8)$$

Ker je lega polov in ničel v ravnini  $s$  vedno simetrična na realno os, je tudi DLK simetričen na realno os in je dovolj, če določimo DLK le za zgornjo polovico ravnine  $s$ .

## 1.2 Diagram lege korenov sistema 2. reda

Preden si ogledamo risanje DLK z uporabo pravil, si zaradi boljše predstave oglejmo DLK za sistem 2. reda. Narisali ga bomo tako, da bomo izračunali analitično odvisnost obeh korenov od ojačenja  $K$ .

Regulacijski sistem naj ima odprtozančno prenosno funkcijo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (1.9)$$

Zaprtozančna prenosna funkcija pa se glasi

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K} \quad (1.10)$$

Karakteristična enačba je torej

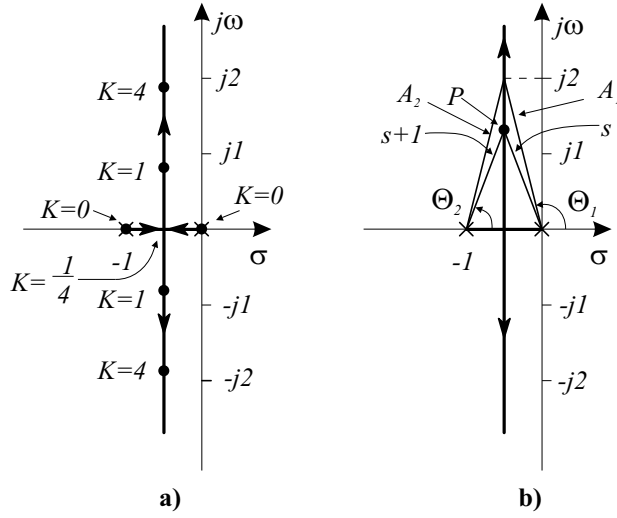
$$s^2 + s + K = 0 \quad (1.11)$$

Ker v tem primeru ni težko analitično izraziti lege korenov v odvisnosti od ojačenja  $K$ , tudi ni razloga, da bi uporabili pravila za grafično risanje. Korena enačbe (1.11) sta

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4K} \quad s_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4K} \quad (1.12)$$

Korena sta realna za  $K \leq \frac{1}{4}$  in kompleksna za  $K > \frac{1}{4}$ . DLK je določen z legami korenov, ko gre  $K$  od 0 do  $\infty$ . Ustrezni DLK prikazuje slika 1.3.

Pri  $K = 0$  je  $s_1 = 0$  in  $s_2 = -1$ , torej izvira DLK iz odprtozančnih polov. Ko se  $K$  povečuje proti vrednosti  $\frac{1}{4}$ , se zaprtozančna pola gibljeta proti točki  $(-\frac{1}{2}, 0)$  po realni osi. Vsi ti koreni odgovarjajo nadkritično dušenemu sistemu. Pri  $K = \frac{1}{4}$  sta oba zaprtozančna pola enaka (kritično dušenje  $\zeta = 1$ )  $s_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $s_2 = -\frac{1}{2}$ . Za  $K > \frac{1}{4}$  postane sistem podkritično dušen. Realna komponenta je konstantna  $(-\frac{1}{2})$ , imaginarna pa gre proti neskončnosti, ko gre  $K$  proti neskončnosti.



Slika 1.3: DLK za sistem 2. reda

Zelo enostavno se lahko prepričamo, da je za vsako točko na DLK izpolnjen kotni pogoj. Če izberemo neko točko  $P$ , se kotni pogoj glasi (slika 1.3 b)

$$\angle \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] = -\angle s - \angle [s+1] = -\Theta_1 - \Theta_2 = \pm 180^\circ (2k+1) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

in je torej izpolnjen, saj je  $\Theta_1 + \Theta_2 = 180^\circ$ . Kotni pogoj je izpolnjen tudi za poljubno točko  $P$ , ki leži na realni osi med 0 in  $-1$ . Takrat velja  $\Theta_1 = 180^\circ$ ,  $\Theta_2 = 0^\circ$  oz.  $\Theta_1 + \Theta_2 = 180^\circ$ . Prav tako se lahko enostavno prepričamo, da za točke, ki niso na DLK, ne velja kotni pogoj.

Vrednost  $K$ , ki pripada določeni točki DLK, pa določimo iz pogoja absolutne vrednosti. Za točko  $s = -\frac{1}{2} \pm j2$  velja

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)} \right|_{s=-\frac{1}{2}+j2} = 1 \quad (1.14)$$

$$K = |s(s+1)|_{s=-\frac{1}{2}+j2} = 4.25 \quad (1.15)$$

oz. grafično

$$K = |s||s+1| = A_1 A_2 = 2.06 \cdot 2.06 = 4.25 \quad (1.16)$$

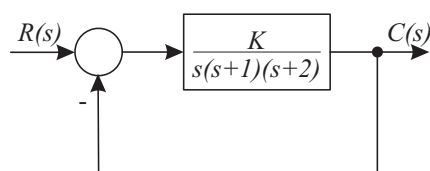


S pomočjo DLK, ki ga prikazuje slika 1.3, lahko določimo glavne karakteristike dinamičnega ponašanja sistema pri spreminjanju ojačenja  $K$ . Z večanjem ojačenja se manjša  $\zeta$ , večata se  $\omega_n$  in  $\omega_d$ . V odzivu se torej več prevzpon. Vendar sistem za še tako velik  $K$  ne more postati nestabilen, saj koreni karakteristične enačbe ostanejo v levi polravnini.

## 1.3 Pravila za risanje diagrama lege korenov

Pravila za risanje DLK si bomo ogledali na primeru, ki ga prikazuje slika 1.4.

DLK prikazuje slika 1.7



Slika 1.4: Regulacijski sistem

Velja torej

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad H(s) = 1 \quad (1.17)$$

**1. Napišemo karakteristično enačbo  $1 + G(s)H(s) = 0$  v faktorizirani obliki.**

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0 \quad (1.18)$$

$m$  je število končnih ničel odprtozančnega sistema,  $n$  je število končnih polov odprtozančnega sistema. Običajno velja  $n \geq m$ . V našem primeru je  $n = 3$  in  $m = 0$ . Nato vrišemo v ravnino  $s$  pole in ničle odprtozančnega sistema. V našem primeru sistem nima končne ničle, ima pa pole  $-p_1 = 0$ ,  $-p_2 = -1$  in  $-p_3 = -2$ . V splošnem pa si lahko vsak sistem predstavljamo tako, da je število

odprtozančnih polov enako številu odprtozančnih ničel, pri čemer je  $n - m$  ničel v neskončnosti (ali  $m - n$  polov, če  $m > n$ ).

Na realni in imaginarni osi moramo imeti isto merilo. DLK je simetričen na realno os, ker so kompleksni poli vedno v konjugirano kompleksnih parih.

**2. Poiščemo začetne in končne točke DLK in določimo število vej.** Začetne točke na DLK pripadajo ojačenju  $K = 0$  (tu veje izvirajo) in jih dobimo z limito ob upoštevanju enačbe (1.18)

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K} = \infty \quad (1.19)$$

Enačba (1.19) je izpolnjena, če kompleksna spremenljivka  $s$  zavzame vrednost enega izmed polov. *Torej vse veje DLK izhajajo iz odprtozančnih polov.* Končne točke pripadajo ojačenju  $K = \infty$  (tu imajo veje ponor) in jih dobimo z limito

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} = 0 \quad (1.20)$$

Enačba (1.20) je izpolnjena, če kompleksna spremenljivka  $s$  zavzame vrednost ene izmed ničel. *Zato imajo vse veje ponor v odprtozančnih ničlah* ( $m$  končnih,  $n - m$  v neskončnosti).

V našem primeru torej veje izhajajo iz točk  $s = 0$ ,  $s = -1$ ,  $s = -2$  in končujejo v neskončnosti.

*DLK ima natanko toliko vej, kolikor je korenov karakteristične enačbe.* Ker je pri realnih sistemih  $n \geq m$ , je število vej tudi enako številu odprtozančnih polov  $n$ .

Za naš primer ima torej DLK tri veje.

### 3. Določimo potek DLK na realni osi.

Le-ta je odvisen le od odprtozančnih polov in ničel, ki ležijo na realni osi. Konjugirano kompleksni poli in ničle imajo namreč v poljubni točki na realni osi kotni prispevek  $360^\circ$ , torej ne vplivajo.

Pri določitvi, kateri del na realni osi pripada DLK, upoštevajmo kotni pogoj. V našem primeru mora veljati za testno točko  $s$  na realni osi

$$\angle[G(s)] = -\angle s - \angle[s+1] - \angle[s+2] = \pm 180^0(2k+1) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

Če izberemo točko na pozitivni realni osi, je

$$\angle s = \angle[s+1] = \angle[s+2] = 0^0 \quad (1.22)$$

in kotni pogoj ni izpolnjen. Torej na pozitivni realni osi ni točk, ki bi pripadale DLK. Če izberemo točko  $s$  med 0 in  $-1$ , velja

$$\angle s = 180^0 \quad \angle[s+1] = \angle[s+2] = 0^0 \quad (1.23)$$

torej je kotni pogoj izpolnjen. Na podoben način se lahko prepričamo, da na intervalu  $-2 < s < -1$  kotni pogoj ni izpolnjen in da je na intervalu  $s < -2$  kotni pogoj izpolnjen. Torej poteka DLK med 0 in  $-1$  in med  $-2$  in  $-\infty$ . Ker vemo, da DLK izvira v polih in konča v ničlah, označimo smeri vseh treh vej.

V zvezi z določevanjem DLK na realni osi velja pravilo:

*testna točka na realni osi pripada DLK, če je skupno število realnih odprtozančnih polov in ničel desno od te točke liho število.*

#### 4. Določimo asimptote.

Asimptote določajo, kako poteka DLK pri visokih vrednostih ojačenja  $K$ . Ker je  $n - m$  ničel v neskončnosti, se  $n - m$  vej konča v neskončnosti. Potek teh vej v neskončnosti določimo s pomočjo  $n - m$  asimptot. Ker je DLK simetričen na realno os, so tudi asimptote simetrične na realno os. Njihovo lego določimo tako, da izračunamo *kote*, ki jih oklepajo asimptote z realno osjo in *presečišče asimptot*, ki leži na realni osi.

Za določitev kotov zapišemo odprtozančno prenosno funkcijo v polinomski obliki

$$G(s)H(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} = K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (1.24)$$

V neskončnosti ravnine  $s$  se funkcija  $\frac{B(s)}{A(s)}$  obnaša približno

$$\frac{B(s)}{A(s)} \doteq \frac{s^m}{s^n} = \frac{1}{s^{n-m}} \quad n \geq m \quad (1.25)$$

Ima torej pol  $(n - m)$  tega reda.

Ob upoštevanju kotnega pogoja za neko točko v neskončnosti dobimo

$$\angle[G(s)H(s)] = -(n - m)\angle s = \pm 180^0(2k + 1) \quad k = 0, 1, 2, \dots (n - m - 1) \quad (1.26)$$

Kot kompleksorja  $s$  predstavlja hkrati tudi kot asimptote  $\beta_k$ , saj se točka  $s$  nahaja v neskončnosti

$$\begin{aligned} \angle[G(s)H(s)] &= -(n - m)\beta_K = \pm 180^0(2k + 1) \\ \beta_K &= \frac{\mp 180^0(2k + 1)}{n - m} \quad k = 0, 1, 2, \dots (n - m - 1) \end{aligned} \quad (1.27)$$

V našem primeru je  $n - m = 3$  in dobimo tri kote za tri asimptote:  $\beta_0 = 60^0$ ,  $\beta_1 = 180^0$ ,  $\beta_2 = 300^0$  (ali  $-60^0$ ).

Za določitev presečišča asimptot  $\sigma_a$  na realni osi uporabimo Vietovo pravilo, ki pravi, da je koeficient polinoma  $n$ -tega reda pri  $(n - 1)$  potenci, če je koeficient pri  $n$ -ti potenci enak 1, negativna vsota vseh korenov tega polinoma<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n &= (s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n) \\ a_1 &= - \sum_{i=1}^n (-s_i) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Zapišimo karakteristično enačbo

$$1 + G(s)H(s) = 1 + K \frac{B(s)}{A(s)} = 0 \quad (1.29)$$

---

<sup>1</sup> $s_i$  so negativne vrednosti korenov

v obliki

$$B(s) \left[ \frac{A(s)}{B(s)} + K \right] = 0 \quad (1.30)$$

oz.

$$B(s) \left[ \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m} + K \right] = 0 \quad (1.31)$$

Z deljenjem števca z imenovalcem pridemo do izraza

$$B(s) [s^{n-m} + (a_1 - b_1)s^{n-m-1} + \dots + K] = 0 \quad (1.32)$$

Pri  $K \rightarrow \infty$  vemo, da gre  $m$  korenov karakteristične enačbe (1.32) proti  $m$  končnim odprtozančnim ničlam polinoma  $B(s)$ , ostalih  $n - m$  korenov pa se nahaja v neskončnosti in se lahko določijo tako, da poiščemo korene polinoma v oglatem oklepaju pri izrazu (1.32). Čeprav so koreni v neskončnosti, je njihova vsota končna in različna od nič

$$-\sum \text{neskončnih korenov} = +s_1 + s_2 + \dots + s_{n-m} = +(a_1 - b_1) \quad (1.33)$$

Predstavljajmo si  $n - m$  korenov, ki ležijo v  $s$  ravnini na krogu z neskončnim radijem. Razmere prikazuje slika 1.5.

Razcepiščna točka  $O_1$  oz. vrednost  $\sigma_a$  je določena s središčem kroga, ki gre skozi  $n - m$  korenov v neskončnosti. Iz slike 1.5 je razvidno, da velja

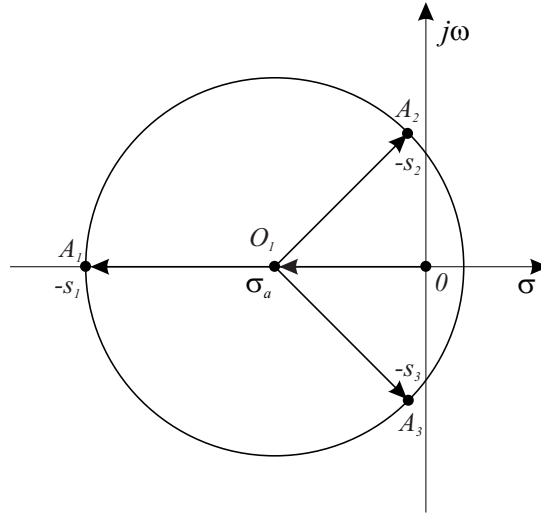
$$\overline{O_1 A_1} + \overline{O_1 A_2} + \overline{O_1 A_3} + \dots + \overline{O_1 A_{n-m}} = 0 \quad (1.34)$$

oz.

$$(-s_1 - \sigma_a) + (-s_2 - \sigma_a) + (-s_3 - \sigma_a) + \dots + (-s_{n-m} - \sigma_a) = 0 \quad (1.35)$$

Iz enačbe (1.35) sledi

$$\sigma_a = -\frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{n-m}}{n - m} = -\frac{a_1 - b_1}{n - m} \quad (1.36)$$



Slika 1.5: Določitev presečišča asimptot

Ker pa je po Vietovem pravilu  $a_1$  negativna vsota odprtozančnih polov,  $b_1$  pa negativna vsota odprtozančnih ničel

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sum_{i=1}^n (-p_i) \\ b_1 &= -\sum_{i=1}^m (-z_i) \end{aligned} \quad (1.37)$$

dobimo končni rezultat za presečišče asimptot

$$\sigma_a = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{\sum \text{poli} - \sum \text{ničle}}{n - m} \quad (1.38)$$

Ker so kompleksni poli in ničle vedno v konjugirano kompleksnih parih, je  $\sigma_a$  vedno realen. V našem primeru je  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_3 = 2$ , končnih ničel pa ni. Zato je

$$\sigma_a = -\frac{0 + 1 + 2}{3} = -1 \quad (1.39)$$

Presečišče asimptot je torej v točki  $\sigma_a = -1$  na realni osi.

### 5. Določimo razcepišča v DLK ( $\sigma_b$ ).

Razcepišča v DLK se pojavijo na tistih mestih, kjer nastopijo *večkratni koreni* karakteristične enačbe. Razcepišča so lahko na realni osi ali pa v konjugirano kompleksnih točkah.

Če DLK poteka po realni osi med dvema odprtozančnima poloma, potem na tem odseku leži vsaj eno razcepišče, iz katerega DLK zapušča realno os. Če DLK na realni osi poteka med dvema ničloma (ena je lahko v neskončnosti), potem prav tako obstaja vsaj eno razcepišče, v katerem DLK vstopa na realno os. Če DLK na realni osi poteka med polom in ničlo, običajno tam ni razcepišča ali pa so le-ti v parih (DLK izstopa in DLK vstopa na odsek).

Iz enačbe (1.29) je razvidno, da lahko karakteristično enačbo napišemo tudi v obliki

$$F(s) = A(s) + KB(s) = 0 \quad (1.40)$$

Ker so pogoj za razcepišče večkratni koreni, predpostavimo, da ima  $F(s)$   $r$ -kratni koren v razcepiščni točki  $s = \sigma_b$

$$F(s) = (s - \sigma_b)^r (s - s_1)(s - s_2) \dots \quad (1.41)$$

Vrednost odvoda  $\frac{dF(s)}{ds}$  v točki  $\sigma_b$  je zaradi večkratnega korena enaka

$$\left. \frac{dF(s)}{ds} \right|_{s=\sigma_b} = 0 \quad (1.42)$$

Iz enačbe (1.40) pa sledi

$$\frac{dF(s)}{ds} = A'(s) + KB'(s) = 0 \quad (1.43)$$

$$K = -\frac{A'(s)}{B'(s)} \quad (1.44)$$

$$F(s) = A(s) - \frac{A'(s)}{B'(s)}B(s) = 0 \quad (1.45)$$

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0 \quad (1.46)$$

Če enačbo (1.46) rešimo na  $s$ , dobimo točke, kjer nastopajo večkratni koreni. Če iz enačbe (1.40) izrazimo  $K$

$$K = -\frac{A(s)}{B(s)} \quad (1.47)$$

ter enačbo (1.47) odvajamo na  $s$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B(s)A'(s) - B'(s)A(s)}{B^2(s)} \quad (1.48)$$

dobimo v števcu enak izraz, kot ga podaja leva stran enačbe (1.46). Če postavimo  $\frac{dK}{ds} = 0$ , dobimo torej enako enačbo, kot je enačba (1.46). Zato razcepišče  $s = \sigma_b$  določa enačba

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=\sigma_b} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_b \quad (1.49)$$

Treba je poudariti, da vse rešitve enačbe (1.49) ne predstavljajo razcepišč. Če realni koren enačbe (1.49) leži na odseku DLK, potem je to gotovo razcepišče, če pa realni koren ne leži na odseku DLK, potem tudi ne predstavlja razcepišča. Koreni enačbe (1.49), ki niso razcepišča, bi bila razcepišča za komplementarni DLK ( $-\infty < K < 0$ ).

Pogoj za določitev razcepišč lahko izpeljemo tudi na naslednji način: zapišimo odprtozančno prenosno funkcijo v obliki

$$G(s)H(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.50)$$

Ko je ojačenje tako, da dobimo večkratne korene karakterističnega polinoma (kar je pogoj za razcepišče), velja



$$A(s) + KB(s) = (s - \sigma_b)^l M(s) = 0 \quad l \geq 2 \quad (1.51)$$

Če spremenimo  $K$  za  $\Delta K$ , velja enačba

$$A(s) + (K + \Delta K)B(s) = 0 \quad (1.52)$$

Enačbo preoblikujemo v

$$1 + \frac{\Delta KB(s)}{A(s) + KB(s)} = 0 \quad (1.53)$$

oz. ob upoštevanju enačbe (1.51)

$$1 + \frac{\Delta KB(s)}{(s - \sigma_b)^l M(s)} = 0 \quad (1.54)$$

ali

$$\frac{\Delta K}{s - \sigma_b} = -(s - \sigma_b)^{l-1} \frac{M(s)}{B(s)} \quad (1.55)$$

$M(s)$  in  $B(s)$  ne vsebujeta faktorja  $s - \sigma_b$ . Če upoštevamo  $\Delta K \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow \sigma_b$ , potem je limita izraza (1.55), ko gre  $s \rightarrow \sigma_b$

$$\lim_{s \rightarrow \sigma_b} \frac{\Delta K}{s - \sigma_b} = \frac{dK}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_b \quad (1.56)$$

Za obravnavani primer je karakteristični polinom

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad (1.57)$$

oz.

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s) \quad (1.58)$$

Z upoštevanjem enačbe (1.49) dobimo

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0 \quad (1.59)$$

oz.

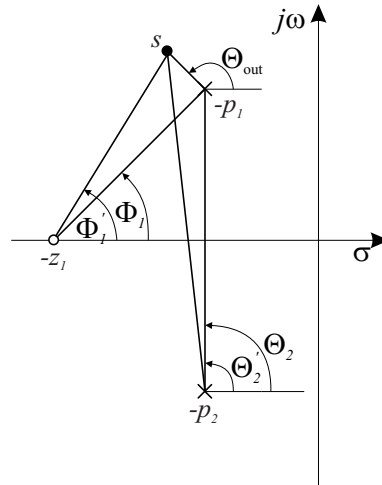
$$s_1 = -0.4224 \quad s_2 = -1.5774 \quad (1.60)$$

Ker odsek med 0 in  $-1$  na realni osi pripada DLK, je razcepišče  $\sigma_b = -0.4224$ .

**6. Določimo kote, pod katerimi DLK izhaja iz kompleksnih odprtozančnih polov in kote, pod katerimi DLK vstopa v kompleksne odprtozančne ničle.**

Določitev teh kotov je zelo pomembna za natančnejšo določitev DLK. Določimo jih z upoštevanjem kotnega pogoja. Pri tem izberemo testno točko v neposredni bližini pola oz. ničle, za katero računamo izhodni kot ( $\Theta_{out}$ ) oz. vhodni kot ( $\Phi_{in}$ ).

Ker v obravnavanem primeru nimamo kompleksnih polov in ničel odprtozančnega sistema, si določitev pogledimo na primeru, ko ima sistem eno realno ničlo in en konjugirano kompleksni par polov. Razmere prikazuje slika 1.6.



Slika 1.6: Določitev izhodnega kota  $\Theta_{out}$

Predpostavimo, da DLK skozi testno točko  $s$  zapušča pol  $-p_1$ . Za točko  $s$  velja kotni pogoj

$$\Phi'_1 - (\Theta_{out} + \Theta'_2) = \pm 180^\circ (2k + 1) \quad (1.61)$$

oz.

$$\Theta_{out} = 180^\circ + \Phi'_1 - \Theta'_2 \quad (1.62)$$

Če limitiramo točko  $s$  proti polu  $-p_1$ , potem enačba (1.62) preide v obliko

$$\Theta_{out} = 180^0 + \Phi_1 - \Theta_2 \quad (1.63)$$

Običajno izberemo testno točko  $s$  kar v polu oz. ničli, v katerem izračunavamo kot. Ta pol oz. ničlo povežemo z vsemi drugimi odprtozančnimi poli in ničlami. V vseh polih določimo kote  $\Theta_i$ , v vseh ničlah pa kote  $\Phi_i$ . Izhodni kot iz kompleksnega pola podaja enačba

$$\Theta_{out} = 180^0 + \sum_i \Phi_i - \sum_i \Theta_i \quad (1.64)$$

Na podoben način določimo kot, pod katerim DLK vstopa v kompleksno ničlo.

$$\Phi_{in} = 180^0 - \sum_i \Phi_i + \sum_i \Theta_i \quad (1.65)$$

### 7. Poiščemo točke, kjer DLK seka imaginarno os.

To lahko naredimo z uporabo Routh-ovega kriterija, s poizkušanjem (izberemo točko na imaginarni osi in preverimo kotni pogoj) ali pa vstavimo v karakteristično enačbo  $s = j\omega$  in jo rešimo na  $\omega$  in  $K$ . Tako dobimo frekvenco, pri kateri DLK seka imaginarno os (sistem je mejno stabilen) in ojačenje v tej točki.

V našem primeru, ko je karakteristična enačba enaka

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad (1.66)$$

ima Routh-ova shema obliko

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

Regulacijski sistem je torej mejno stabilen pri  $K = 6$ . Ustrezno frekvenco, kjer DLK seka imaginarno os, pa dobimo iz druge vrstice Routh-ove sheme.

$$\begin{aligned} 3s^2 + K &= 3s^2 + 6 = 0 \\ s &= \pm j\omega = \pm j\sqrt{2} \end{aligned} \quad (1.67)$$

### 8. Določimo vmesne točke na različnih vejah.

Najpomembneje je natančno določiti DLK v bližini imaginarne osi in v bližini koordinatnega izhodišča, saj te točke predstavljajo dominantne korene. Potek lahko določimo s poizkušanjem. V nekem predvidenem območju izbiramo točke in preverjamo kotni pogoj.

Določimo za naš primer tisto točko na DLK, ki odgovarja dušenju zaprtozančnega sistema  $\zeta = 0.5$ . Liniji konstantnega dušenja predstavljata poltraka, ki oklepata z negativno realno osjo kot  $\pm 60^\circ$  ( $\Psi = \arccos \zeta$ ). Na tej liniji izbiramo točke in testna točka

$$s_1 = -0.333 + j0.578 \quad (1.68)$$

izpolnjuje kotni pogoj. Torej skozi njo poteka DLK. Enako velja za točki  $s_1$  konjugirano točko  $s_2$ .

### 9. Določitev ojačenj v določenih točkah DLK.

Ojačenje v določeni točki DLK izračunamo s pomočjo pogoja absolutne vrednosti (enačba (1.3))

$$|G(s)H(s)| = \frac{K|s + z_1||s + z_2|\dots|s + z_m|}{|s + p_1||s + p_2|\dots|s + p_n|} = 1 \quad (1.69)$$

oz.

$$\begin{aligned} K &= \frac{|s + p_1||s + p_2|\dots|s + p_n|}{|s + z_1||s + z_2|\dots|s + z_m|} = \\ &= \frac{\text{produkt dolžin od točke } s \text{ do polov}}{\text{produkt dolžin od točke } s \text{ do ničel}} \end{aligned} \quad (1.70)$$

$K$  lahko določimo grafično ali analitično.

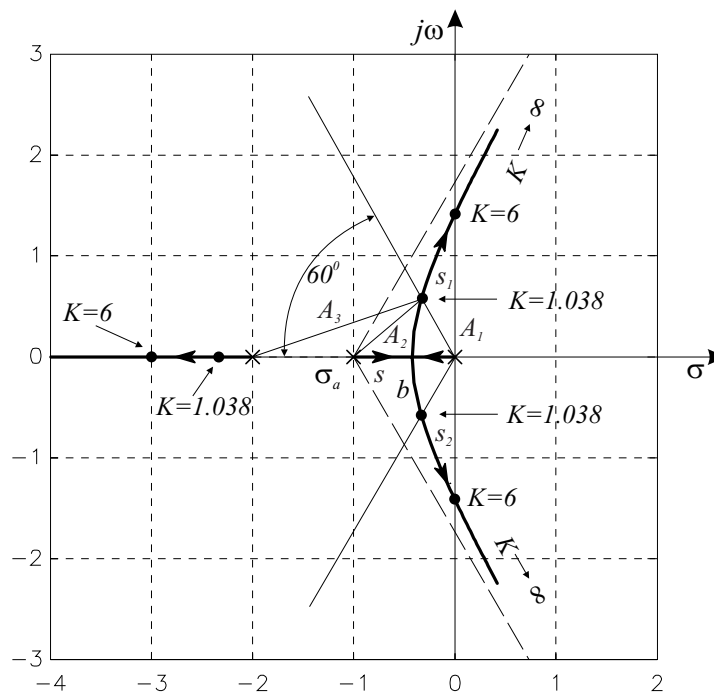
Če želimo v našem primeru izračunati ojačenje v točki  $s_1$  (ali  $s_2$ ) lahko to naredimo torej analitično

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0.333+j0.578} = 1.038 \quad (1.71)$$

ali grafično z merjenjem ustreznih dolžin

$$K = \frac{|s_1||s_1+1||s_1+2|}{1} = \frac{A_1 A_2 A_3}{1} = 0.667 \cdot 0.882 \cdot 1.764 = 1.038 \quad (1.72)$$

Slika 1.7 prikazuje DLK za regulacijski sistem, ki ga prikazuje slika 1.4 oz. enačba (1.17).



Slika 1.7: Diagram lege korenov

Povzemimo pravila za risanje DLK

1. Napišemo karakteristično enačbo v faktorizirani obliki ter vrišemo odprtozančne pole in ničle.

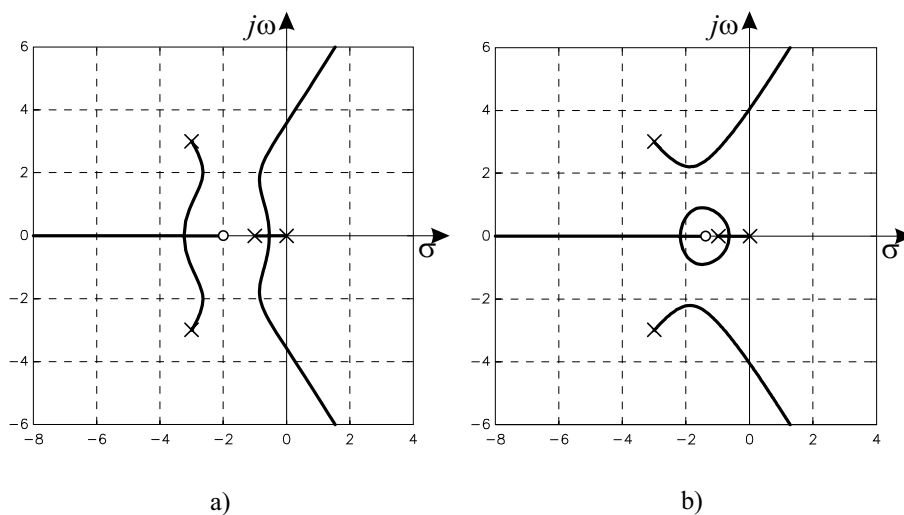
2. Veje izvirajo iz odprtozančnih polov in se zaključijo v odprtozančnih ničlah (končnih ali neskončnih).
3. Določimo potek DLK na realni osi.
4. Določimo asimptote za veje, ki končujejo v neskončnosti.
5. Določimo razcepišča v DLK.
6. Določimo kote, pod katerimi DLK izhaja iz kompleksnih odprtozančnih polov in kote, pod katerimi DLK vstopa v kompleksne odprtozančne ničle.
7. Določimo točke, kjer DLK seka imaginarno os.
8. Določimo vmesne točke predvsem v bližini imaginarne osi v okolici izhodišča.
9. Določimo ojačenja v določenih točkah DLK.

V določenih primerih lahko majhna sprememba v legi določenega pola ali ničle povsem spremeni DLK. Slika 1.8a prikazuje DLK za sistem

$$G(s) = K \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 3 - j3)(s + 3 + j3)} \quad (1.73)$$

slika 1.8b pa DLK za sistem

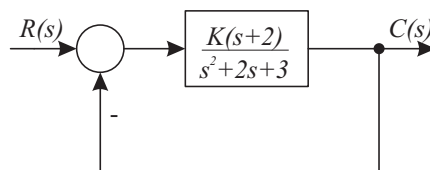
$$G(s) = K \frac{s + 1.3}{s(s + 1)(s + 3 - j3)(s + 3 + j3)} \quad (1.74)$$



Slika 1.8: DLK sistema 3. reda a) ničla pri  $s = -2$   
b) ničla pri  $s = -1.3$

Sistema se razlikujeta le v legi ničle, vendar imata povsem različna DLK.

**Primer 1.1** Za regulacijski sistem, ki ga prikazuje slika 1.9, narišimo DLK.



Slika 1.9: Regulacijski sistem

Odprtozančna prenosna funkcija je

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3} \quad H(s) = 1 \quad (1.75)$$

1. Določimo karakteristično enačbo v faktorizirani obliki

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+2)}{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})} = 0 \quad (1.76)$$

Število polov je  $n = 2$ , število ničel pa je  $m = 1$ .

2. DLK ima 2 veji. Izhaja iz konjugirano kompleksnih polov  $-p_1 = -1 + j\sqrt{2}$ ,  $-p_2 = -1 - j\sqrt{2}$  in se zaključuje v ničlah  $-z_1 = -2$ ,  $-z_2 = -\infty$ .
3. Določimo DLK na realni osi. Za odsek levo od točke  $-2$  velja, da je desno od njega liho število odprtozančnih polov in ničel, zato pripada DLK.
4. Določimo asimptote. Ker je  $n - m = 1$ , imamo eno asimptoto. Kot, ki ga oklepa z realno osjo, je

$$\beta_k = \pm \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = 180^\circ \quad k = 0 \quad (1.77)$$

Asimptota je torej negativna realna os.

5. Ker DLK na realni osi poteka med dvema ničloma, imamo razcepišče. Ker je

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2} \quad (1.78)$$

je

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+2)(s+2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s+2)^2} = 0 \quad (1.79)$$

kar da enačbo

$$s^2 + 4s + 1 = 0 \quad (1.80)$$

oz. rešitve

$$s_1 = -3.732 \quad s_2 = -0.268 \quad \Rightarrow \sigma_b = -3.732 \quad (1.81)$$

Razcepišče, v katerem DLK vstopa na realno os, je v točki  $s = -3.732$ .

6. Določimo kot, pod katerim DLK zapušča odprtozančni konjugirano kompleksni par. Izhodni kot za pol  $s = -p_1$  je

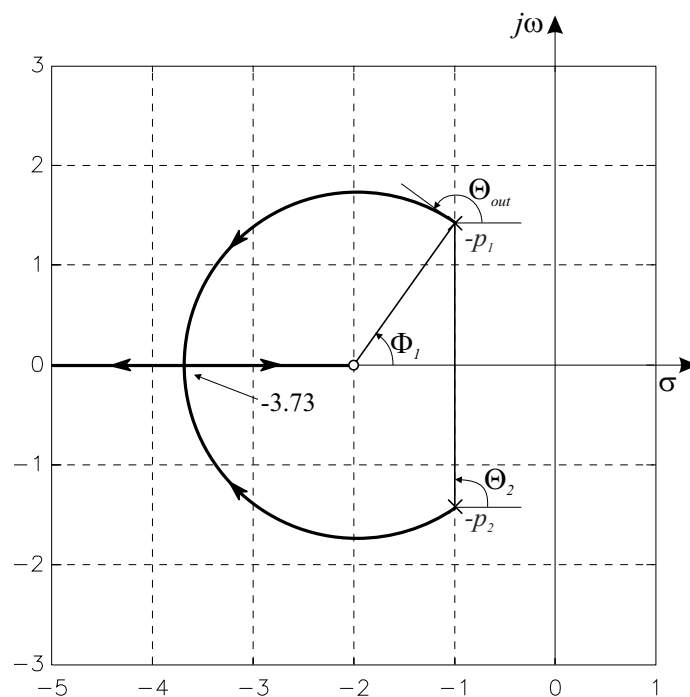
$$\Theta_{out} = 180^\circ + \Phi_1 - \Theta_2 = 180^\circ + 55^\circ - 90^\circ = 145^\circ \quad (1.82)$$

Izhodni kot za pol  $s = -p_2$  ni potrebno računati, ker je DLK simetričen na realno os.



7. DLK ne seka imaginarne osi.
8. Določimo vmesne točke.
9. Po želji izračunamo ojačenja v določenih točkah.

Ustrezni DLK prikazuje slika 1.10.



Slika 1.10: Diagram lege korenov

S pomočjo kotnega pogoja lahko pokažemo, da del DLK poteka po krožnici. Za obravnavani sistem podaja kotni pogoj enačba

$$\angle[s + 2] - \angle[s + 1 - j\sqrt{2}] - \angle[s + 1 + j\sqrt{2}] = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (1.83)$$

Če  $s = \sigma + j\omega$  vstavimo v enačbo, dobimo

$$\angle[\sigma + 2 + j\omega] - \angle[\sigma + 1 + j\omega - j\sqrt{2}] - \angle[\sigma + 1 + j\omega + j\sqrt{2}] = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (1.84)$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki

$$\arctan\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \pm 180^0(2k+1) \quad (1.85)$$

ali

$$\arctan\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \arctan\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180^0(2k+1) \quad (1.86)$$

Če naredimo operacijo  $\tan$  na obeh straneh enačbe (1.86) in upoštevamo relacijo

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad (1.87)$$

dobimo

$$\tan\left[\arctan\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \arctan\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\right] = \tan\left[\arctan\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180^0(2k+1)\right] \quad (1.88)$$

oz.

$$\frac{\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1} + \frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}}{1 - \left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)} = \frac{\frac{\omega}{\sigma+2} \pm 0}{1 \mp \frac{\omega}{\sigma+2} \cdot 0} \quad (1.89)$$

kar lahko poenostavimo po množenju s  $(\sigma+1)^2$  v obliko

$$\frac{2\omega(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2 - (\omega^2 - 2)} = \frac{\omega}{\sigma+2} \quad (1.90)$$

oz.

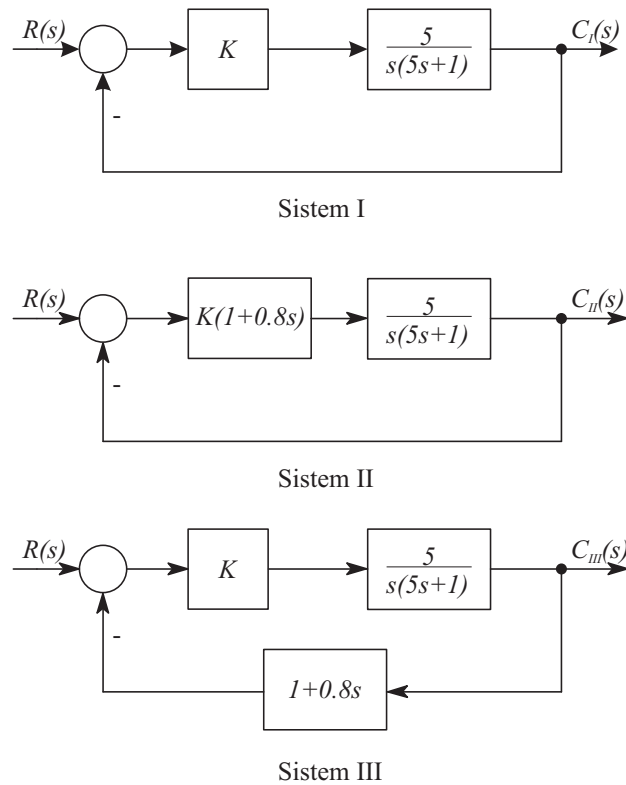
$$\omega[(\sigma+2)^2 + \omega^2 - 3] = 0 \quad (1.91)$$

Zadnja enačba je izpolnjena, če je

$$\omega = 0 \quad \text{ali} \quad (\sigma+2)^2 + \omega^2 = (\sqrt{3})^2 \quad (1.92)$$

Prva enačba določa DLK na realni osi, druga enačba pa je enačba kroga s središčem v  $-2$  in z radijem  $\sqrt{3}$ . Del realne osi in del kroga, ki ne pripada DLK, pripada komplementarnemu DLK (za  $-\infty < K < 0$ ).  $\square$

**Primer 1.2** Primerjava delovanja  $P$  in  $PD$  regulacijskih sistemov ter regulacijskega sistema s pozicijsko hitrostno povratno zanko. Tri različne regulacijske sisteme prikazuje slika 1.11. Prvi ima  $P$  regulator, drugi  $PD$  regulator, tretji pa pozicijsko hitrostno povratno zanko.



Slika 1.11: Regulacijski sistemi

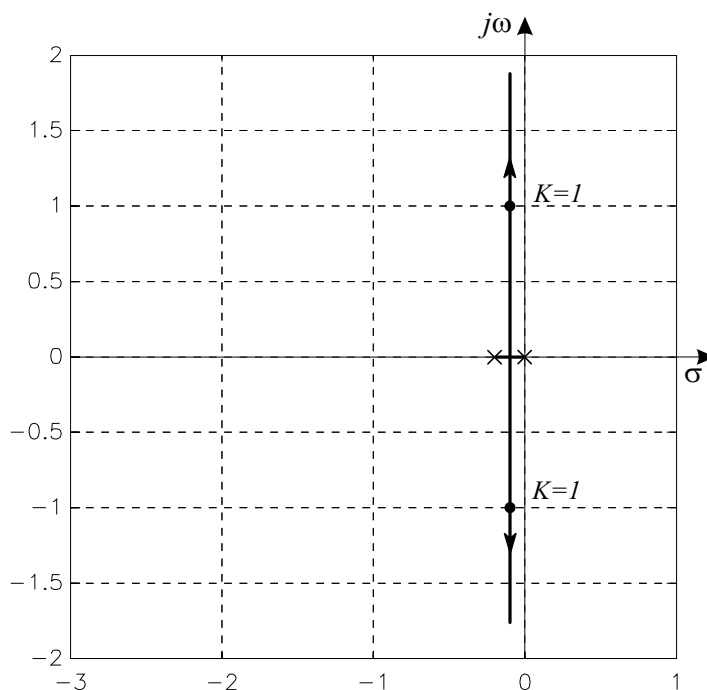
Prvemu sistemu pripada naslednja odprtozančna prenosna funkcija v obliki, ki je primerna za analizo z DLK

$$G_I(s)H_I(s) = \frac{K}{s(s+0.2)} \quad (1.93)$$

in DLK za spremenljivo ojačenje, kot ga prikazuje slika 1.12

Za  $K = 1$  ima sistem I zaprtozančni par kompleksnih polov

$$s_{1,2} = -0.1 \pm j0.995 \quad (1.94)$$



Slika 1.12: Diagram lege korenov sistema I

Odprtozančni prenosni funkciji sistemov II in III sta enaki

$$G_{II}(s)H_{II}(s) = G_{III}(s)H_{III}(s) = \frac{0.8K(s + 1.25)}{s(s + 0.2)} \quad (1.95)$$

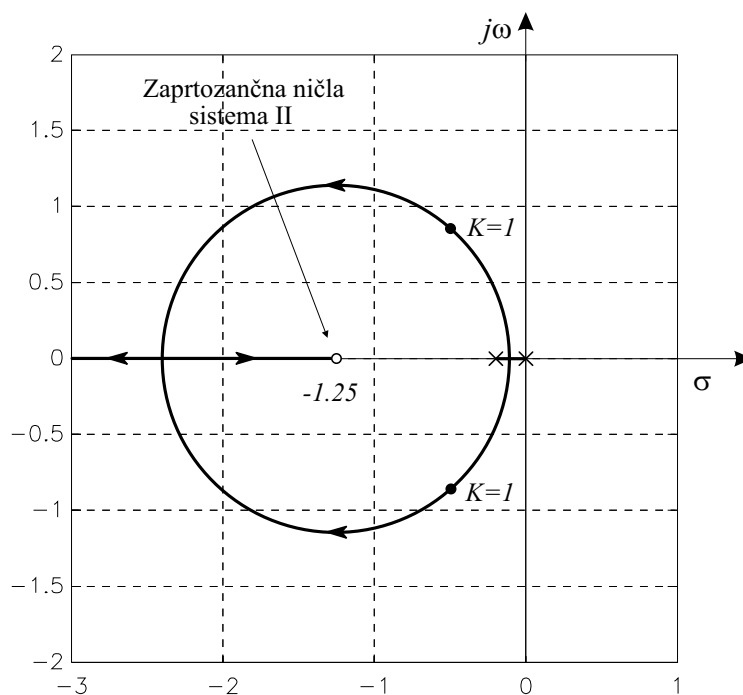
zato imata oba sistema tudi enak DLK. Le tega prikazuje slika 1.13

Seveda pa enak DLK pomeni le to, da imata oba sistema enake zaprtozančne pole. Le ta sta za  $K = 1$

$$s_{1,2} = -0.5 \pm j0.866 \quad (1.96)$$

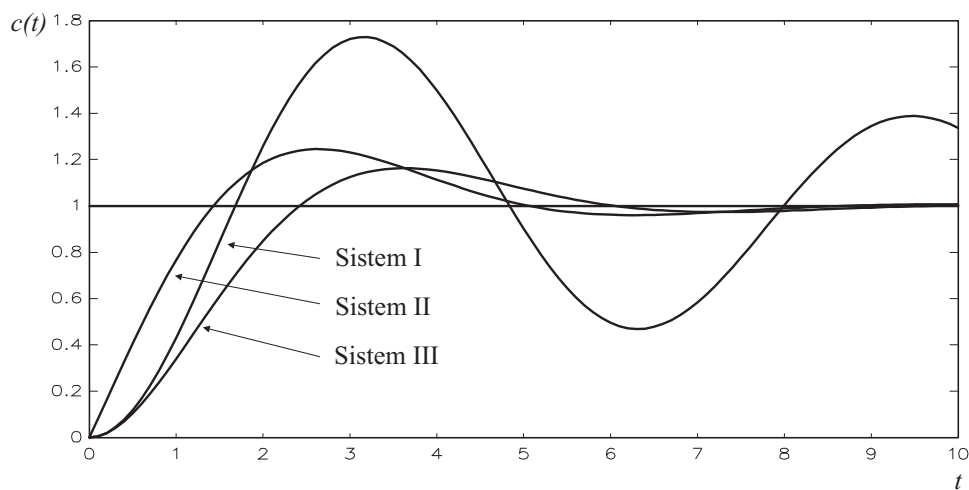
Sistema II in III imata različni zaprtozančni prenosni funkciji zaradi različnih zaprtozančnih ničel. Medtem ko ima sistem II eno končno ničlo pri  $s = -1.25$ , pa sistem III nima končne ničle.

Slika 1.14 prikazuje odzive vseh treh regulacijskih sistemov na stopničasto spre-



Slika 1.13: DLK sistemov II in III

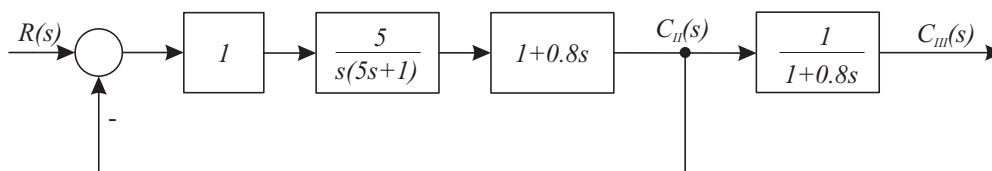
membo referenčnega signala pri ojačenju  $K = 1$ .



Slika 1.14: Potek regulirane veličine pri stopničasti spremembi reference

Sistema I in III sta sistema 2. reda brez ničel. Iz ustreznih DLK je razvidno, da ima sistem I bistveno manjši dušilni koeficient  $\zeta$ , zato ima krajši čas vzpona in

večji prevzpon. Sistem II pa ima v zaprtozančni prenosni funkciji glede na sistem III dodatno ničlo (pri  $s = -1.25$ ), za katero pa vemo, da skrajša čas vzpona in poveča prevzpon.



Slika 1.15: Bločni diagram, ki prikazuje relacijo med regulirnimama veličinama sistemov II in III

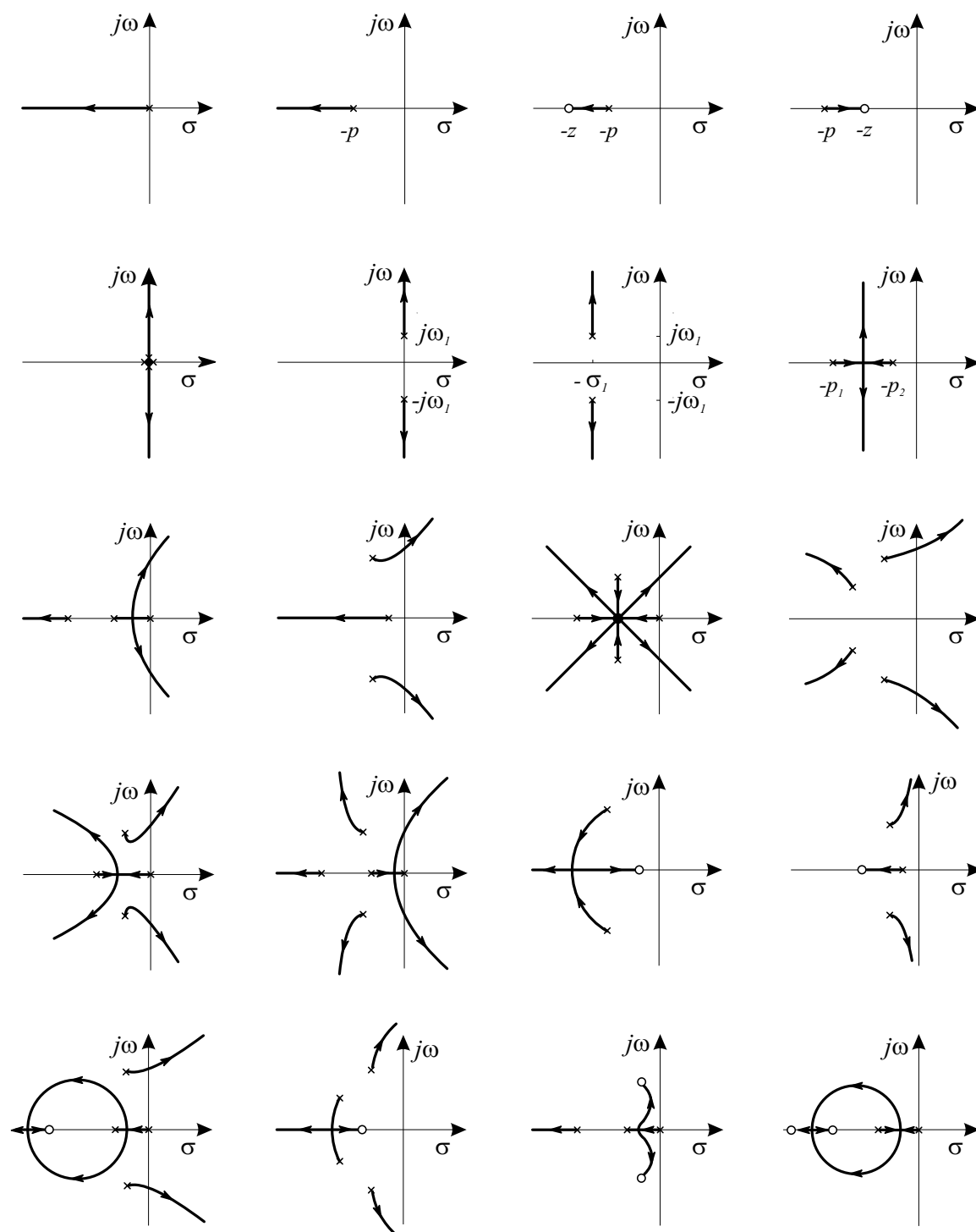
Relacijo med odzivoma sistemov II in III si lahko nazorno predstavimo tudi s preoblikovanjem bločnega diagrama sistema III, kakor prikazuje slika 1.15.

Vidimo, da je regulirana veličina sistema III preko sistema prvega reda zakasnjena regulirana veličina sistema II, kar se sklada z razmerami, ki jih prikazuje slika 1.14.

□

### Diagrami lege korenov nekaterih značilnih sistemov

Slika 1.16 prikazuje nekatere značilne diagrame lege korenov.



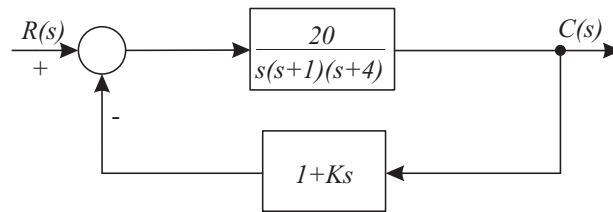
Slika 1.16: Značilni diagrami lege korenov

## 1.4 Posebni primeri diagramov lege korenov

### 1.4.1 Risanje diagrama lege korenov, če parameter ni multiplikativni faktor

Pri analizi in načrtovanju regulacijskih sistemov spremenljivi parameter ni vedno multiplikativni faktor  $K$  v izrazu  $G(s)H(s)$ . V takih primerih je možno karakteristično enačbo preoblikovati tako, da spreminjajoči parameter postane multiplikativni faktor. Postopek bo prikazal naslednji primer.

**Primer 1.3** Slika 1.17 prikazuje regulacijski sistem s pozicijsko-hitrostno povratno zanko. Želimo narisati DLK pri spreminjajočem ojačenju hitrostne povratne zanke  $K$  in določiti tako ojačenje  $K$ , da bo dušenje dominantnega para korenov enako  $\zeta = 0.4$ .



Slika 1.17: Regulacijski sistem

Sistem ima odprtozančno prenosno funkcijo

$$G(s)H(s) = \frac{20(1 + Ks)}{s(s+1)(s+4)} \quad (1.97)$$

Torej  $K$  ne nastopa kot multiplikativni faktor. Pomagamo pa si tako, da karakteristični izraz

$$1 + \frac{20(1 + Ks)}{s(s+1)(s+4)} = 0 \quad (1.98)$$

preoblikujemo v obliko

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20 + 20Ks = 0 \quad (1.99)$$



Izberemo

$$20K = K_1 \quad (1.100)$$

nato pa preuredimo karakteristično enačbo z deljenjem leve in desne strani z vsoto členov, ki ne vsebujejo  $K$ , v nov karakteristični izraz

$$1 + \frac{K_1 s}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = 0 \quad (1.101)$$

Torej smo dobili konstanto  $K_1$  v multiplikativni obliki in izvedemo lahko standardni postopek za risanje DLK.

Karakteristična enačba v faktorizirani obliki se glasi

$$1 + \frac{K_1 s}{(s + j2)(s - j2)(s + 5)} = 0 \quad (1.102)$$

Ker sta na realni osi ničla pri  $s = 0$  in pol pri  $s = -5$ , poteka med tema dvema točkama DLK. Ker je  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $n - m = 2$ , ima DLK dve asimptoti

$$\beta_k = \frac{\pm 180^0(2k + 1)}{2} \quad \beta_0 = 90^0 \quad \beta_1 = 270^0 = -90^0 \quad (1.103)$$

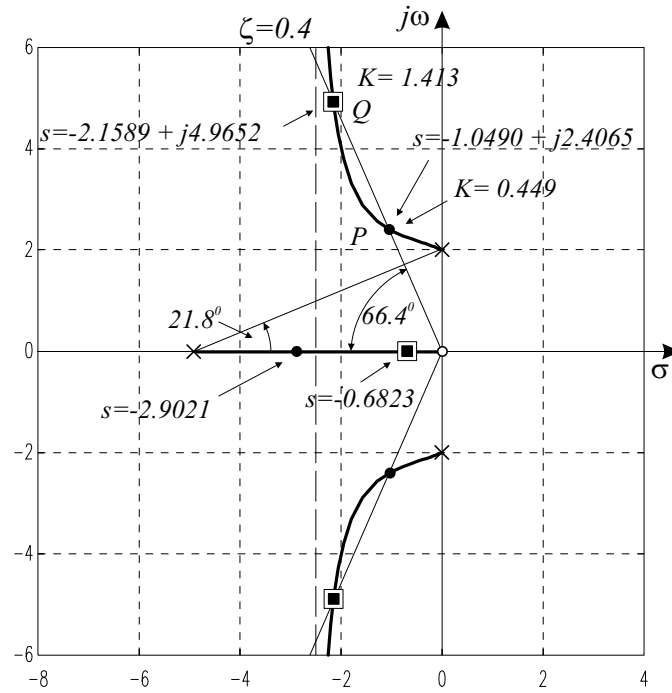
Presečišče asimptot določimo s pomočjo izraza

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{poli} - \sum \text{ničle}}{n - m} = \frac{-5 + 0}{2} = -2.5 \quad (1.104)$$

Kot, pod katerim DLK zapušča pol  $s = j2$ , pa je

$$\Theta_{out} = 180^0 - 90^0 - 21.8^0 + 90^0 = 158.2^0 \quad (1.105)$$

Ustrezni DLK prikazuje slika 1.18



Slika 1.18: Diagram lege korenov

Zaprtozančni poli z dušenjem  $\zeta = 0.4$  morajo ležati na liniji, ki poteka iz izhodišča pod kotom  $\pm 66.4^\circ$  glede na negativno realno os. V našem primeru ta linija dvakrat seka DLK - v točki  $P$  in v točki  $Q$ . V točki  $P$  je ojačenje

$$K_1 = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s=-1.0490+j2.4065} = 8.9801 \quad (1.106)$$

OZ.

$$K = \frac{K_1}{20} = 0.449 \quad (1.107)$$

V točki  $Q$  pa je vrednost  $K_1$

$$K_1 = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s=-2.1589+j4.9652} = 28.260 \quad (1.108)$$

OZ.

$$K = \frac{K_1}{20} = 1.413 \quad (1.109)$$

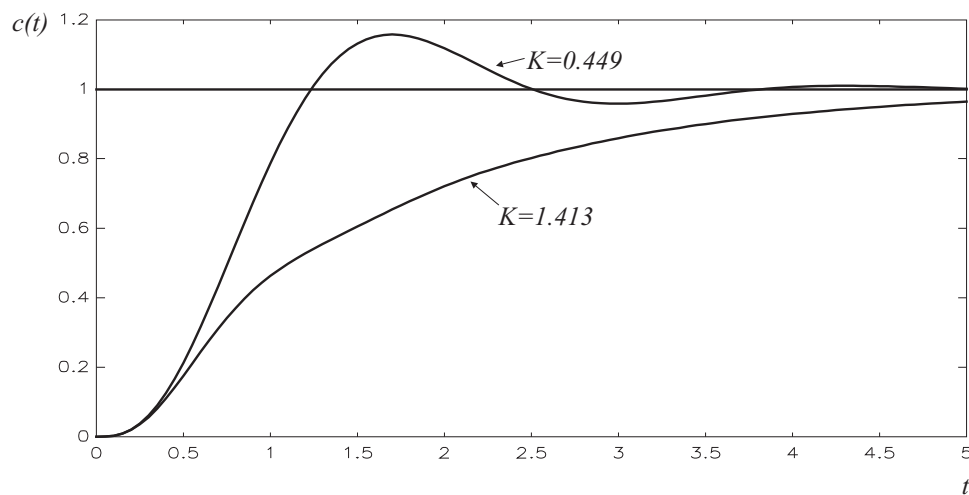
Za  $K = 0.449$  ima sistem zaprtozančne pole

$$s_{1,2} = -1.0490 \pm j2.4065 \quad s_3 = -2.9021 \quad (1.110)$$

za  $K = 1.413$  pa

$$s_{1,2} = -2.1589 \pm j4.9652 \quad s_3 = -0.6823 \quad (1.111)$$

Čeprav je dušenje konjugirano kompleksnega para korenov enako pri obeh ojačenjih  $K$ , pa se regulacijski sistem, vede pri omenjenih  $K$ -jih zelo različno. Pri  $K = 0.449$  ima zaprtozančni sistem dominanten konjugirano kompleksni par polov in se torej vede podobno kot sistem drugega reda. Pri ojačenju  $K = 1.413$  pa je dominanten realni koren, ki se nahaja blizu izhodišča in vnaša veliko dušenje. Slika 1.19 prikazuje odziva regulacijskega sistema na stopničasto spremembo reference pri obeh ojačenjih. Opazimo, da je dosti primernejši odziv pri  $K = 0.449$ .

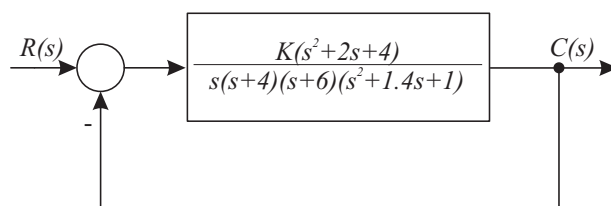


Slika 1.19: Odziva regulacijskega sistema pri dveh različnih ojačenjih

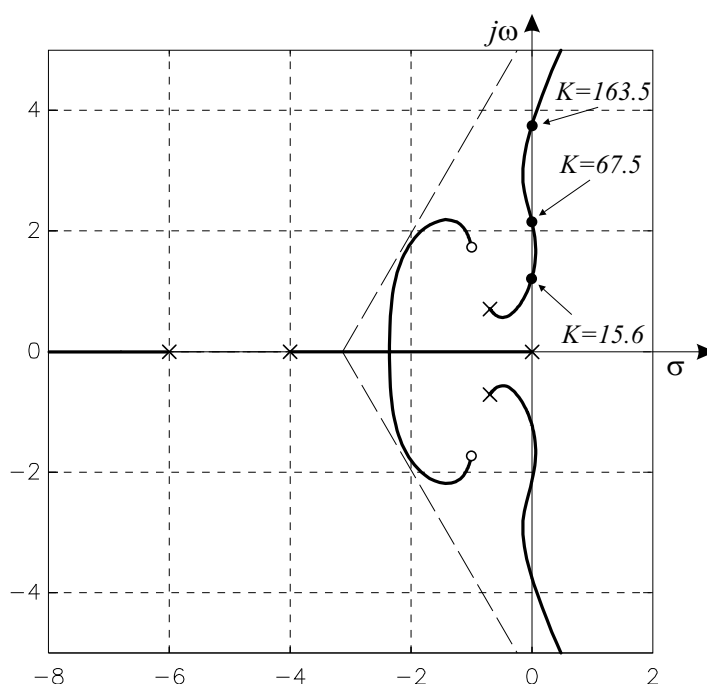
□

### 1.4.2 Diagram lege korenov pogojno stabilnega sistema

Regulacijski sistem, ki ga prikazuje slika 1.20, ima pole pri 0,  $-4$ ,  $-6$ ,  $-0.71 \pm j0.71$  in ničli pri  $-1 \pm j1.73$ . DLK prikazuje slika 1.21.



Slika 1.20: Regulacijski sistem



Slika 1.21: Diagram lege korenov

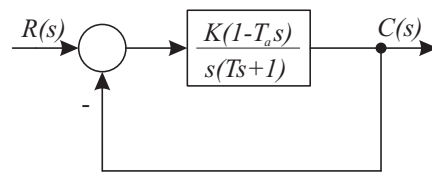
Opazimo, da je sistem stabilen v določenem območju ojačenj  $K$ :  
 $0 < K < 15.6$  in  $67.5 < K < 163.5$ . Takemu sistemu pravimo pogojno stabilni sistem.

Pogojno stabilnim sistemom se v praksi izogibamo. Z dodatnimi kompenzatorji, ki jih uvedemo v regulacijsko zanko, želimo pogojno stabilnost odpraviti (predvsem mislimo na nestabilnost pri majhnih ojačenjih, v našem primeru pri  $15.6 < K < 67.5$ ). DLK nazorno predstavlja pogojno stabilne sisteme in je tudi učinkovito orodje pri načrtovanju kompenzatorjev, s pomočjo katerih preoblikujemo DLK.

### 1.4.3 Diagram lege korenov sistema z neminimalno fazo

Sistem, ki vsebuje ničlo na desni strani ravnine  $s$ , je sistem<sup>2</sup> z neminimalno fazo. Za take sisteme so značilne precejšnje zakasnitve, zato so problematični za reguliranje.

Obravnavajmo regulacijski sistem, ki ga prikazuje slika 1.22.



Slika 1.22: Regulacija fazno neminimalnega sistema

Sistem ima odprtozančno prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \quad T_a > 0 \quad H(s) = 1 \quad (1.112)$$

Sistem je fazno neminimalen, saj ima ničlo pri  $s = +\frac{1}{T_a}$ . Za tak sistem se kotni pogoj spremeni v obliko

$$\begin{aligned} \angle[G(s)] &= -\angle\left[\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)}\right] = \\ &= \angle\left[\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)}\right] + 180^\circ = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.113)$$

OZ.

$$\angle\left[\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)}\right] = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.114)$$

OZ.

$$\angle\left[s - \frac{1}{T_a}\right] - \angle s - \angle\left[s + \frac{1}{T}\right] = 0^\circ \quad (1.115)$$

---

<sup>2</sup>fazno neminimalnost vnaša tudi nestabilni pol v  $GH$  ali mrtvi čas v  $GH$



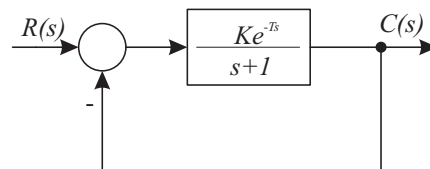
$$G(s)H(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} e^{-Ts} \quad (1.116)$$

oz. ustrezna karakteristična enačba

$$A(s) + KB(s)e^{-Ts} = 0 \quad (1.117)$$

Karakteristična enačba je torej transcendentne oblike. Znano je, da ima taka enačba neskončno korenov. V tem primeru nekatera pravila za risanje DLK niso več uporabna. Zato so izdelana nekatera druga pravila. Podrobna analiza presega okvir tega dela, zato si bomo samo približno ogledali potek risanja diagrama lege korenov.

Oglejmo si primer, ki ga prikazuje slika 1.24



Slika 1.24: Regulacija sistema z mrtvim časom

Sistem ima karakteristično enačbo

$$1 + \frac{Ke^{-Ts}}{s+1} = 0 \quad (1.118)$$

Ker ima karakteristična enačba neskončno korenov, ima DLK neskončno vej. Prav tako je tudi število asimptot neskončno. Vse asimptote so vzporedne z realno osjo.

Kot vedno, bomo tudi tokrat izhajali iz kotnega pogoja

$$\angle \left[ \frac{Ke^{-Ts}}{s+1} \right] = \angle [e^{-Ts}] - \angle [s+1] = \pm 180^\circ (2k+1) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.119)$$

Ker je

$$\begin{aligned} \angle [e^{-Ts}] &= \angle [e^{-T(\sigma+j\omega)}] = -\omega T & [\text{rd}] \\ &= -57.3\omega T & [^\circ] \end{aligned} \quad (1.120)$$

je kot odvisen samo od frekvence ( $T$  je konstanta). Torej je kotni pogoj

$$-57.3\omega T - \angle[s + 1] = \pm 180^0(2k + 1) \quad (1.121)$$

Za  $k = 0$  pa velja

$$\angle[s + 1] = \pm 180^0 - 57.3^0\omega T \quad (1.122)$$

Ker je kotni prispevek  $e^{-Ts}$  enak nič za  $\omega = 0$ , poteka DLK na realni osi med  $-1$  in  $-\infty$  (kot če ne bi bilo mrtvega časa).

Ker je

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\frac{d}{ds}(Ke^{-Ts})}{\frac{d}{ds}(s + 1)} = \lim_{s \rightarrow -\infty} (-KTe^{-Ts}) = -\infty \quad (1.123)$$

ima odprtozančna prenosna funkcija pol pri  $s = -\infty$ . DLK na realni osi izvira iz točk  $s = -\infty$  in  $s = -1$ . Zato obstaja razcepišče, ki ga izračunamo iz pogoja

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=\sigma_b} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_b = -2 \quad (\text{pri } T = 1) \quad (1.124)$$

V razcepišču je vrednost ojačenja  $K = 0.1353$  (enačba 1.118 pri  $s = \sigma_b$ )

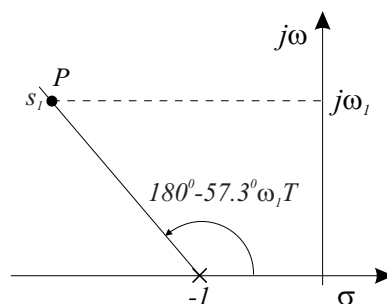
Ostale točke določimo s poizkušanjem ob upoštevanju pogoja (1.122). To lahko storimo tako, da iz točke  $-1$  na negativni realni osi narišemo linijo pod kotom  $180^0 - 57.3^0\omega_1 T$ , kjer je  $\omega_1$  izbrana frekvenca (glej sliko 1.25). Presečišče te linije in horizontalne linije  $\omega = \omega_1$  določa točko, ki izpolnjuje kotni pogoj, torej se nahaja na DLK. S ponavljanjem tega postopka določimo osnovno vejo DLK, ki jo prikazuje slika 1.26 pri mrtvem času  $T = 1$ .

Ostale veje DLK dobimo tako, da v kotni pogoj (1.121) vstavimo druge vrednosti  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Če je  $k = 1$ , postane kotni pogoj

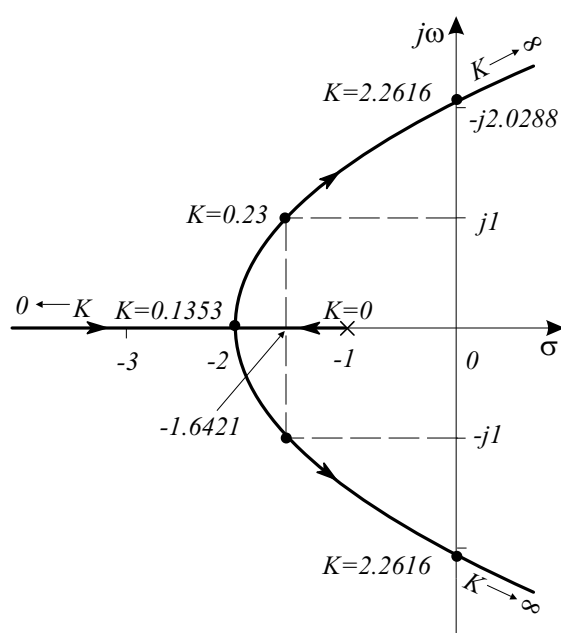
$$\angle[s + 1] = \pm 540^0 - 57.3^0\omega T \quad (1.125)$$

Uporabimo enak postopek kot pri določitvi osnovne veje. DLK z vejami za  $k = 0, 1$  in  $2$  pri  $T = 1$  prikazuje slika 1.27.





Slika 1.25: Določitev točke na diagramu lege korenov



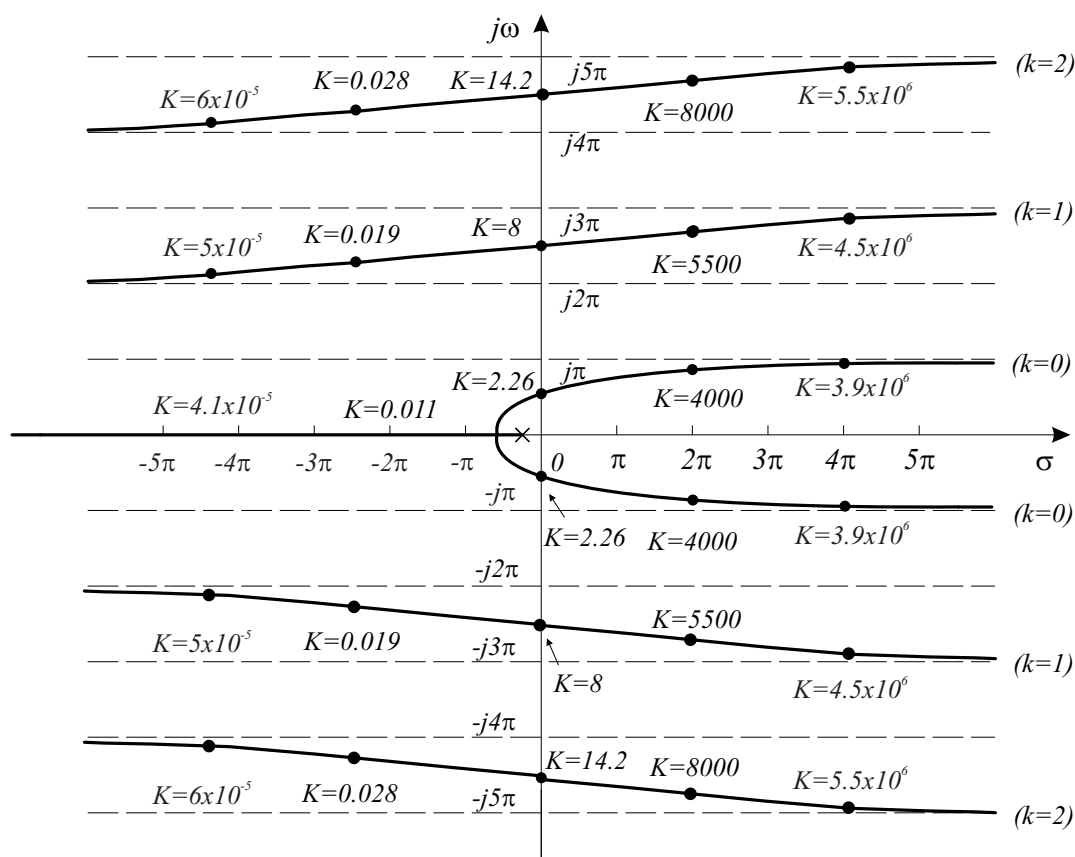
Slika 1.26: Osnovna veja diagrama lege korenov sistema z mrtvim časom

Ojačenja v izbranih točkah določimo z upoštevanjem pogoja absolutne vrednosti

$$\left| \frac{K e^{-Ts}}{s+1} \right| = 1 \quad (1.126)$$

Ker je absolutna vrednost  $|e^{-Ts}| = e^{-T\sigma}$ , velja

$$K = \frac{|s+1|}{e^{-T\sigma}} \quad (1.127)$$



Slika 1.27: Diagram lege korenov sistema z mrtvim časom

Čeprav ima DLK neskončno število vej, pa je osnovna veja, ki leži med  $-j\pi$  in  $j\pi$ , najpomembnejša. Iz slike 1.27 vidimo, da je zaprtozančni sistem na meji stabilnosti pri  $K = 2.26$ , pri ostalih vejah pa pri  $k = 8, 14.2, \dots$ . Torej določa stabilnost sistema prva veja. Pri določenem ojačenju  $K$  so koreni na prvi veji najbližji imaginarni osi in zato bistveno vplivajo na dinamiko sistema. Zato pri analizi in sintezi običajno ostale veje zanemarimo.

DLK sistema z mrtvim časom nazorno prikazuje, da mrtvi čas destabilizira sistem. Odprtozančni sistem 1. reda brez mrtvega časa je namreč v zaprti zanki stabilen za vsak  $K$ . Če pa takemu sistemu dodamo relativno majhen mrtvi čas, pa lahko postane povratnozančni sistem nestabilen.

Zaradi zelo zahtevne analize sistemov z mrtvim časom v praksi uporabljamo tudi razne poenostavitve, npr.

$$e^{-Ts} \doteq 1 - Ts \quad (1.128)$$

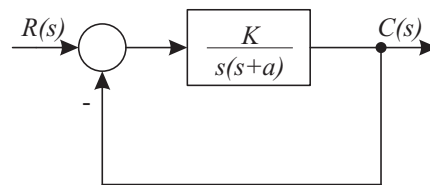
ali

$$e^{-Ts} \doteq \frac{1}{Ts + 1} \quad (1.129)$$

Le-te veljajo za majhne mrtve čase. Poenostavitve predvsem temeljijo na razvoju funkcije  $e^{-Ts}$  v vrsto. Čim več členov pri tem upoštevamo, boljši približek dobimo. Znane so predvsem Pade-jeve aproksimacije.

### 1.4.5 Konturni diagram lege korenov

Kadar proučujemo regulacijski sistem pri večih spreminjajočih parametrih, imenujemo ustrezni DLK konturni DLK. Na primeru bomo prikazali konturni diagram, ki upošteva spreminjanje dveh parametrov od nič do neskončno. Obravnavani regulacijski sistem prikazuje slika 1.28.



Slika 1.28: Regulacijski sistem

Proučevali bomo lego zaprtozančnih polov pri spreminjanju lege pola  $a$  in ojačenja  $K$ . Karakteristična enačba regulacijskega sistema je

$$s^2 + as + K = 0 \quad (1.130)$$

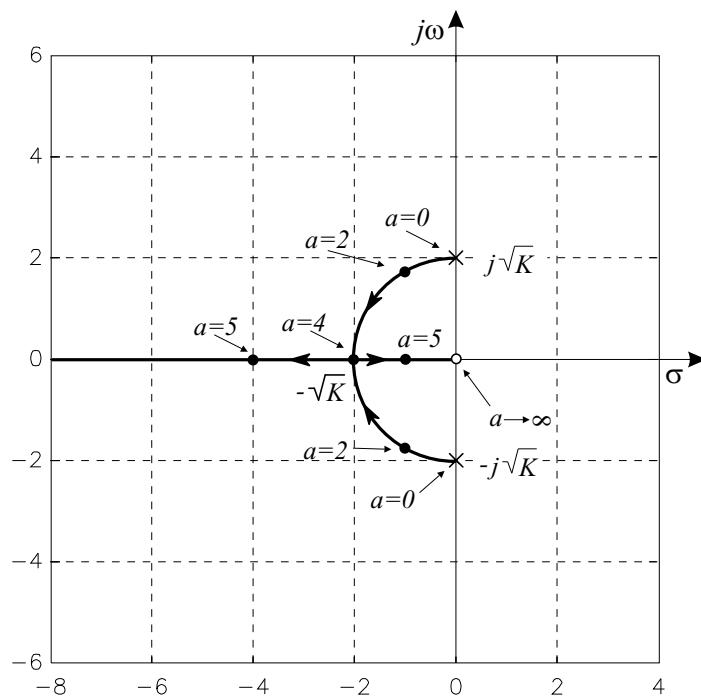
kar lahko preoblikujemo v izraz

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 1 + \frac{as}{(s - j\sqrt{K})(s + j\sqrt{K})} = 0 \quad (1.131)$$

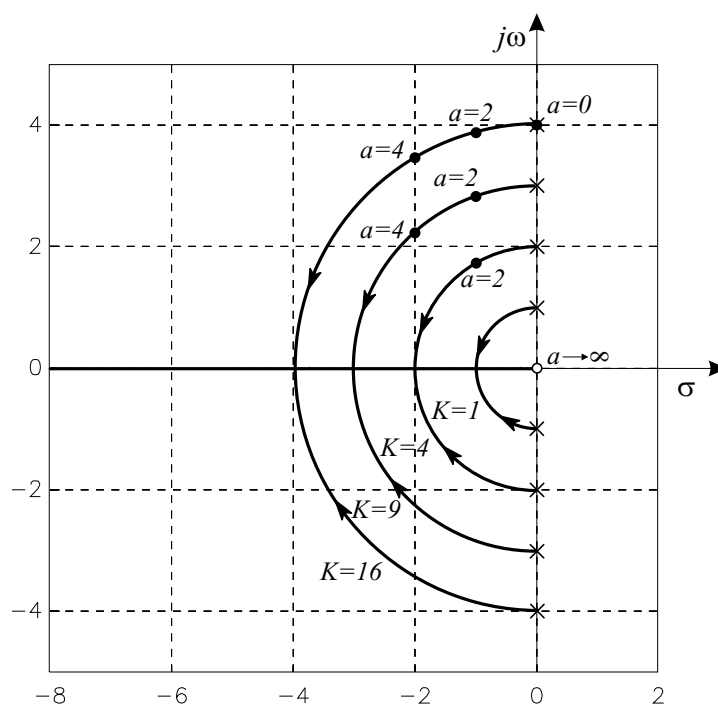
S tem smo dobili  $a$  kot multiplikativni faktor. Konturni diagram dobimo tako, da za različna ojačenja  $K$  narišemo DLK, ki pripada karakteristični enačbi (1.131).

Za vsak  $K$  torej DLK začne v konjugirano kompleksnih polih  $\pm j\sqrt{K}$  in konča v ničlah 0 in  $-\infty$ . Razcepišče na realni osi je v točki  $s = -\sqrt{K}$ .

Slika 1.29 prikazuje DLK za vrednost  $K = 4$ , slika 1.30 pa prikazuje konturni diagram lege korenov, za vrednosti  $K = 1, 4, 9$  in 16.



Slika 1.29: Diagram lege korenov za  $K = 4$



Slika 1.30: Konturni diagram lege korenov



## 2.

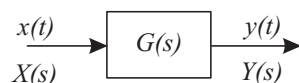
# Analiza regulacijskih sistemov v frekvenčnem prostoru

Regulacijske sisteme lahko včasih učinkovito obravnavamo v frekvenčnem prostoru s pomočjo njihovih frekvenčnih karakteristik. *Frekvenčna karakteristika je lastnost sistema, ki pove, kako se sistem v ustaljenem stanju odziva na sinusni vhodni signal.* Posnamemo jo tako, da preko določenega področja spreminjamo frekvenco sinusnega signala na vходу in merimo ustrezen izhodni signal v ustaljenem stanju. V frekvenčnem prostoru bomo obravnavali le linearne sisteme.

Zaradi številnih dobro izdelanih metod se frekvenčni pristop pogosto uporablja tako pri analizi kakor tudi pri načrtovanju regulacijskih sistemov. Predvsem ga učinkovito uporabljamo pri analizi *absolutne in relativne stabilnosti*. *Pri tem je potrebno poznati le frekvenčno karakteristiko odprtozančnega sistema* (prenosne funkcije), *iz katere sklepamo na stabilnost zaprtozančnega sistema.* Torej za določitev stabilnosti ne potrebujemo zaprtozančnih polov oz. korenov karakteristične enačbe. To je ena prednost frekvenčne analize. Druga prednost pa je v tem, da je možno enostavno in poceni eksperimentalno določiti frekvenčno karakteristiko, saj potrebujemo le sinusni signalni generator in ustrezno merilno opremo za merjenje (snemanje) izhodnega signala. S pomočjo frekvenčne karakteristike sistema pridemo lahko do prenosne funkcije, ki jo nato s pridom uporabimo v načrtovalnem postopku. Tretja prednost frekvenčne obravnave pa je v tem, da je na ta način možno dokaj enostavno obravnavati sisteme z mrtvim časom. Taki sistemi povzročajo pri obravnavi v časovnem prostoru velike težave. Prav tako je v frekvenčnem prostoru možno učinkovito obravnavati regulacijske sisteme v prisotnosti motenj kakor tudi nelinearne sisteme.

## 2.1 Frekvenčna karakteristika dinamičnega sistema

Analizirajmo časovno nespremenljivi, stabilni, linearni sistem, ki ga prikazuje slika 2.1 pri sinusnem vhodnem signalu.



Slika 2.1: Časovno nespremenljivi, stabilni, linearni sistem

$$x(t) = X \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

Zapišimo prenosno funkcijo  $G(s)$  v obliko

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} \quad (2.2)$$

Torej je Laplace-ova transformacija izhodnega signala

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{B(s)X(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} \quad (2.3)$$

pri čemer je  $X(s)$  Laplace-ova transformacija vhodnega signala. Dejstvo, da določitev odziva s pomočjo prenosne funkcije upošteva ničelne začetne pogoje, ni v tem primeru nobena omejitev, saj nas zanimajo le razmere v ustaljenem stanju, na te pa začetni pogoji ne vplivajo.

Če  $Y(s)$  ne vsebuje večkratnih polov, potem enačbo (2.3) zapišemo v obliki parcialnih ulomkov

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n} \end{aligned} \quad (2.4)$$



pri čemer so  $a, \bar{a}, b_1, b_2, \dots, b_n$  ustrezne konstante. Z inverzno Laplace-ovo transformacijo enačbe (2.4) dobimo odziv

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{+j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \dots + b_ne^{-s_nt} \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

Ker imajo pri stabilnem sistemu poli  $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$  negativne realne dele, gredo v enačbi (2.5) vsi členi razen prvih dveh proti nič (za  $t \rightarrow \infty$ ). Enak zaključek velja tudi v primeru večkratnih polov. Če je v točki  $s = -s_j$  pol reda  $m_j$ , dobimo v rešitvi sumande

$$t^{h_j}e^{-s_jt} \quad h_j = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1 \quad (2.6)$$

ki gredo v primeru stabilnih sistemov prav tako proti nič (za  $t \rightarrow \infty$ ). Torej je v vsakem primeru rešitev v ustaljenem stanju

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \quad (2.7)$$

$a$  in  $\bar{a}$  določimo z metodo nedoločenih koeficientov z upoštevanjem enačbe (2.4)

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j} \\ \bar{a} &= G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Bigg|_{s=j\omega} = -\frac{XG(j\omega)}{2j} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Kompleksno vrednost  $G(j\omega)$  lahko zapišemo v obliki

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\Phi(\omega)} \quad (2.9)$$

kjer je  $|G(j\omega)|$  absolutna vrednost,  $\Phi(\omega)$  pa fazni kot, podan z enačbo

$$\Phi(\omega) = \angle[G(j\omega)] = \arctan \left[ \frac{\text{imaginarni del } G(j\omega)}{\text{realni del } G(j\omega)} \right] \quad (2.10)$$

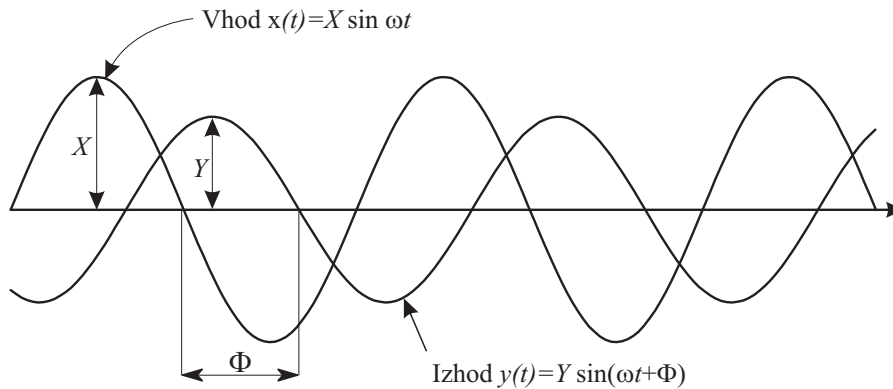
Ob upoštevanju, da je absolutna vrednost soda, fazni kot pa liha funkcija

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{j\Phi(-\omega)} = |G(j\omega)|e^{-j\Phi(\omega)} \quad (2.11)$$

se enačba (2.7) glasi

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \Phi)} - e^{-j(\omega t + \Phi)}}{2j} = \\ &= X|G(j\omega)| \sin(\omega t + \Phi) = \\ &= Y \sin(\omega t + \Phi) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Vidimo, da ima stabilni, časovno nespremenljivi linearni sistem pri sinusnem vhodnem signalu izhodni signal iste frekvence. Amplituda izhodnega signala je  $Y = X|G(j\omega)|$ , fazna premaknitev glede na vhodni signal pa je določena s kotom  $\Phi(\omega) = \angle[G(j\omega)]$ . Ker  $G(j\omega)$  (enačba (2.9)) povsem določa odziv sistema pri sinusnem vzbujanju, ga imenujemo *frekvenčna karakteristika sistema*. Le-to dobimo tako, da v prenosno funkcijo  $G(s)$  namesto  $s$  vstavimo  $j\omega$ . Primer vhodnega in izhodnega signala (v ustaljenem stanju) prikazuje slika 2.2.



Slika 2.2: Vhodni in izhodni signal

Torej veljata za absolutno vrednost in fazni kot enačbi

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{Y}{X} = \frac{\text{amplituda izhodnega signala}}{\text{amplituda vhodnega signala}} \\ \angle[G(j\omega)] &= \Phi(\omega) = \text{fazna premaknitev izhodnega signala glede na vhodni signal} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Če je fazni kot pozitiven, ima sistem t.i. prehitevalni karakter (phase lead), če pa je le ta negativen, pa zakasnilni karakter (phase lag).

**Primer 2.1** Sistem 1. reda ima prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (2.14)$$

Zato je frekvenčna karakteristika

$$G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} \quad (2.15)$$

oz.

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \quad (2.16)$$

$$\Phi(\omega) = -\arctan(\omega T) \quad (2.17)$$

kar pomeni, da je pri vhodnem signalu  $x(t) = X \sin(\omega t)$  izhodni signal v ustaljenem stanju

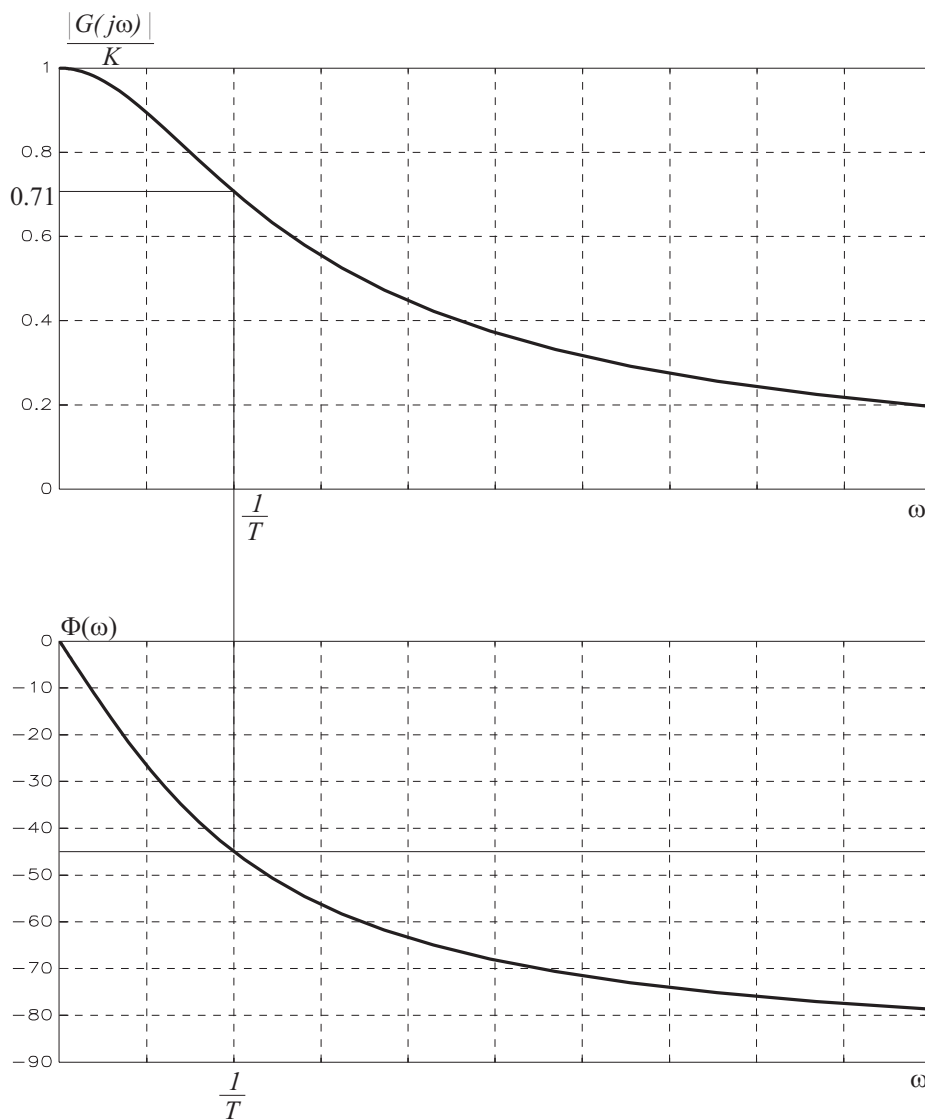
$$y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega T)) \quad (2.18)$$

Opazimo, da je absolutna vrednost frekvenčne karakteristike pri majhnih frekvencah približno  $K$ , pri visokih pa 0, fazno zaostajanje pa je pri nizkih frekvencah  $0^\circ$ , pri visokih pa  $90^\circ$ . Frekvenčno karakteristiko prikazuje slika 2.3.  $\square$

### Določitev frekvenčne karakteristike iz lege polov in ničel v $s$ ravnini

Frekvenčno karakteristiko lahko določimo grafično s pomočjo lege polov in ničel prenosne funkcije v  $s$  ravnini. Za primer vzemimo sistem z eno realno ničlo, z enim realnim polom in  $s$  polom v koordinatnem izhodišču

$$G(s) = \frac{K(s + z)}{s(s + p)} \quad (2.19)$$

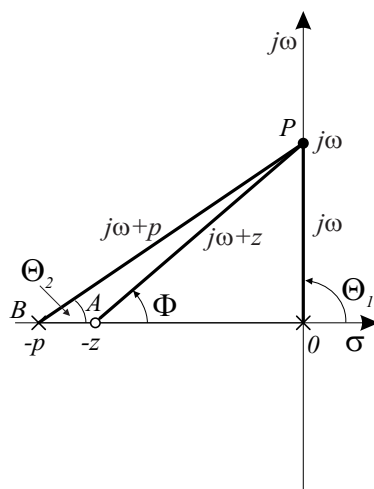


Slika 2.3: Frekvenčna karakteristika sistema 1. reda

Lego polov in ničle prikazuje slika 2.4.

Frekvenčna karakteristika sistema v točki  $\omega$  se glasi

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + z)}{j\omega(j\omega + p)} \quad (2.20)$$



Slika 2.4: Določitev frekvenčne karakteristike s pomočjo lege polov in ničel

Ker so  $j\omega + z$ ,  $j\omega$  in  $j\omega + p$  kompleksorji z dolžinami  $\overline{AP}$ ,  $\overline{OP}$  in  $\overline{BP}$  s koti  $\Phi$ ,  $\Theta_1$  in  $\Theta_2$ , je absolutna vrednost frekvenčne karakteristike

$$|G(j\omega)| = \frac{K|j\omega + z|}{|j\omega||j\omega + p|} = \frac{K \overline{AP}}{\overline{OP} \overline{BP}} \quad (2.21)$$

fazni kot pa

$$\begin{aligned} \angle[G(j\omega)] &= \angle[j\omega + z] - \angle[j\omega] - \angle[j\omega + p] = \arctan \frac{\omega}{z} - 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{p} = \\ &= \Phi - \Theta_1 - \Theta_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Frekvenčno karakteristiko dobimo z izbiro različnih točk na  $j\omega$  osi ( $0 \leq \omega < \infty$ ).

Za predstavitev frekvenčne karakteristike se običajno uporabljajo trije frekvenčni diagrami:

- Bodejev diagram,
- polarni diagram in
- Nicholsov diagram

## 2.2 Bodejev diagram

Bodejev diagram predstavlja frekvenčno karakteristiko sistema (prenosne funkcije) z dvema diagramoma. V prvem diagramu je na ordinatni osi logaritem absolutne vrednosti, v drugem pa fazni kot. V obeh diagramih je na abscisni osi frekvenca v logaritemskem merilu. *Logaritem absolutne vrednosti* izražamo v decibelih [dB] in jo določimo z izrazom

$$L(\omega) \text{ [dB]} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (2.23)$$

Fazni kot pa podaja izraz

$$\Phi(\omega) = \angle[G(j\omega)] = \arctan \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} \quad (2.24)$$

Bistvena prednost logaritmičnega merila je v tem, da se produkti znotraj faktoriziranega zapisa prenosne funkcije  $|G(j\omega)|$  spremenijo v vsoto. Vsak tak sumand se nato predstavi s t.i. asimptotskim potekom, ki določa absolutno vrednost za zelo nizke in za zelo visoke frekvence. Tudi fazno karakteristiko določimo tako, da določimo fazne poteke posameznih komponent in nato le te seštejemo.

Pri analizi in načrtovanju s pomočjo Bodejevega diagrama bomo običajno risali diagram odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  in iz te frekvenčne karakteristike sklepali na lastnost povratnozančnega regulacijskega sistema.

### 2.2.1 Bodejevi diagrami osnovnih členov

Ker dobimo Bodejev diagram prenosne funkcije z vsoto prispevkov posameznih členov, si oglejmo diagrame karakterističnih členov, ki nastopajo v frekvenčni karakteristiki  $G(j\omega)H(j\omega)$  odprtozančne prenosne funkcije. Ti členi so:

1. ojačenje  $K$
2. integrirni ali diferencirni člen  $(j\omega)^{\mp 1}$
3. člen 1. reda  $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$

4. člen 2. reda  $[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{\pm 1}$

### Bodejev diagram konstante $K$

Logaritem absolutne vrednosti podaja izraz

$$L(\omega) = 20 \log K \quad (2.25)$$

in je torej pozitiven za  $K > 1$  in negativen za  $K < 1$ . Fazni kot je enak nič

$$\Phi(\omega) = 0 \quad (2.26)$$

Ustrezni Bodejev diagram prikazuje slika 2.5.

### Bodejev diagram integrirnega in diferencirnega člena

Logaritem absolutne vrednosti integrirnega člena  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$  podaja izraz

$$L(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \quad (2.27)$$

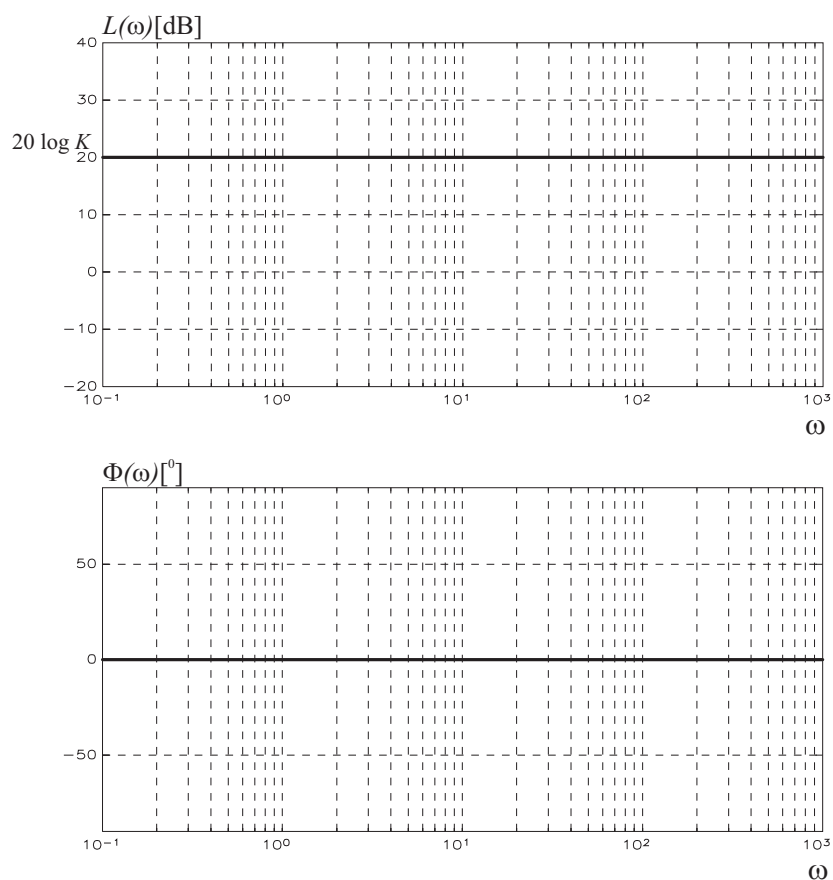
fazni kot pa je

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} = \arctan \frac{-\frac{1}{\omega}}{0} = -90^\circ \quad (2.28)$$

Pri risanju Bodejevih diagramov uporabljamo v zvezi s frekvenčnim področjem izraza dekada in oktava. Dekada je frekvenčno področje med  $\omega$  in  $10\omega$ , oktava pa med  $\omega$  in  $2\omega$ . Logaritem absolutne vrednosti (enačba (2.27)) poteka po premici, ki ima zaradi veljavnosti enačbe

$$-20 \log(\omega) - (-20 \log(10\omega)) = -20 \log \frac{10\omega}{\omega} = -20 \text{ dB} \quad (2.29)$$

naklon -20dB/dek, kar pomeni, da je pri 10x večji frekvenci logaritem absolutne vrednosti za 20dB manjši. Če se izražamo z oktavami, pa je naklon -6dB/okt. Ker velja  $20 \log 1 = 0\text{dB}$ , ima  $L(\omega)$  torej vrednost 0dB pri  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ .



Slika 2.5: Bodejev diagram konstante

Diferencični člen ima logaritem absolutne vrednosti

$$L(\omega) = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \quad (2.30)$$

in fazni kot

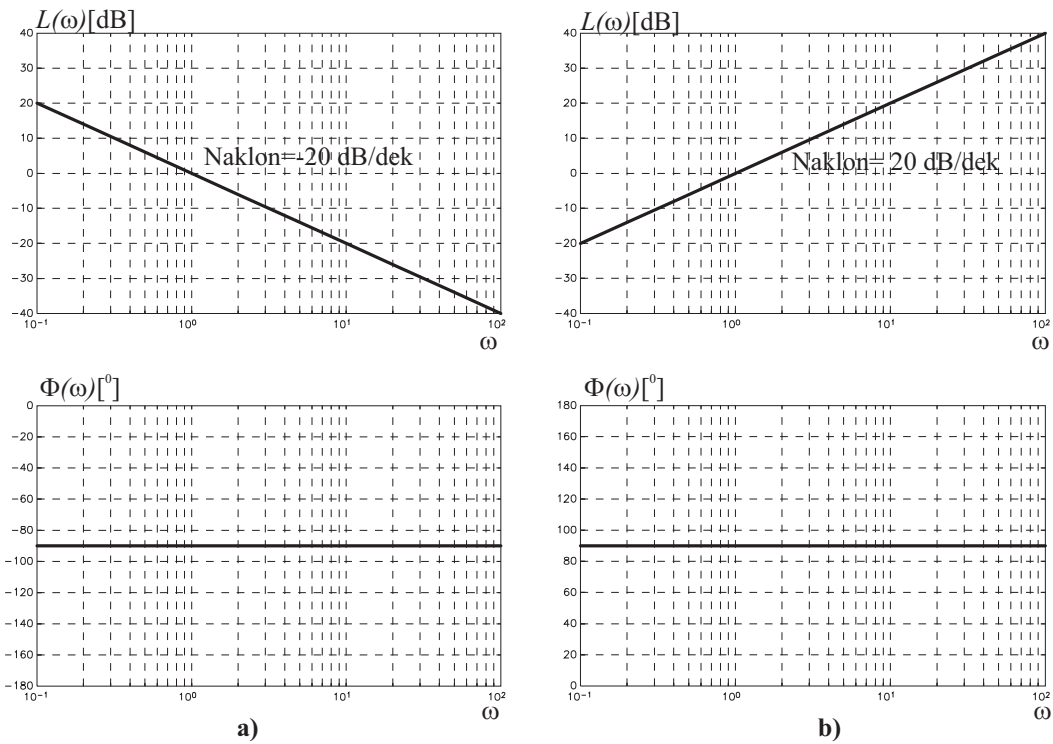
$$\Phi(\omega) = 90^\circ \quad (2.31)$$

Bodejeva diagrama integrirnega in diferencirnega člena prikazuje slika 2.6

Če frekvenčna karakteristika vsebuje člen  $(\frac{1}{j\omega})^n$ , potem velja

$$\begin{aligned} L(\omega) &= -20n \log \omega \\ \Phi(\omega) &= -n90^\circ \end{aligned} \quad (2.32)$$





Slika 2.6: Bodejev diagram a) integrirni člen  
b) diferencirni člen

Za člen  $(j\omega)^n$  pa je Bodejev diagram določen z enačbama

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20n \log \omega \\ \Phi(\omega) &= n90^\circ \end{aligned} \quad (2.33)$$

### Bodejev diagram člena 1. reda

Če frekvenčno karakteristiko opisuje člen 1. reda  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ , potem je logaritem absolutne vrednosti

$$L(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} \quad (2.34)$$

Za risanje si pomagamo z *asimptotskim potekom*. Za nizke frekvence  $\omega \ll \frac{1}{T}$  velja

$$L(\omega) \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad (2.35)$$

Za visoke frekvence  $\omega \gg \frac{1}{T}$  pa velja

$$L(\omega) \doteq -20 \log \omega T \quad (2.36)$$

Nizkofrekvenčna asimptota je torej določena z linijo 0dB, visokofrekvenčna asimptota pa je ravna črta z naklonom -20dB/dek. Pri frekvenci  $\omega = \frac{1}{T}$  ima vrednost 0dB, pri frekvenci  $\frac{10}{T}$  pa -20dB. Obe asimptoti se torej sekata pri frekvenci  $\omega = \frac{1}{T}$ . To frekvenco imenujemo *lomna frekvenca*.

Prvi približek logaritma absolutne vrednosti je tako podan kar z obema asimptotama. Za natančnejšo karakteristiko pa običajno določimo točko, skozi katero poteka  $L(\omega)$  pri lomni frekvenci  $\omega = \frac{1}{T}$

$$L(\omega) = -20 \log \sqrt{1+1} = -10 \log 2 = -3.01 \text{ dB} \quad (2.37)$$

Torej je pri frekvenci  $\omega = \frac{1}{T}$  napaka asimptotskega poteka -3.01dB. Napaka pri frekvencah, ki sta za eno oktavo nižji in višji od lomne frekvence ( $\omega = \frac{1}{2T}$ ,  $\omega = \frac{2}{T}$ ) pa sta -0.97 dB. Diagram napake asimptotskega poteka prikazuje slika 2.7.

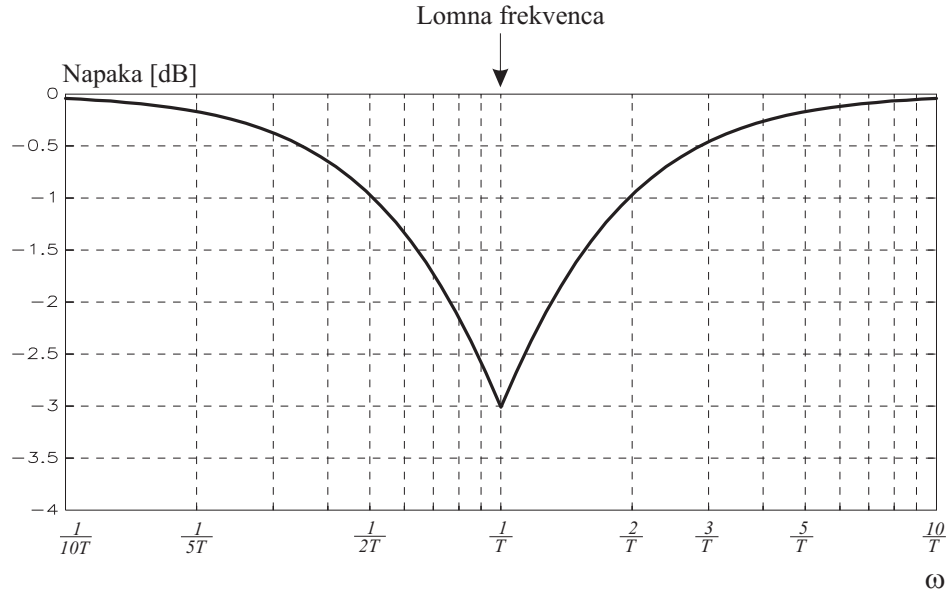
Fazni kot člena 1. reda pa določa enačba

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} = -\arctan \omega T \quad (2.38)$$

in ga narišemo s pomočjo razpredelnice

| $\omega$       | $\frac{1}{10T}$ | $\frac{1}{2T}$ | $\frac{1}{T}$ | $\frac{2}{T}$ | $\frac{10}{T}$ |
|----------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| $\Phi(\omega)$ | -5.7°           | -26.6°         | -45°          | -63.4°        | -84.3°         |

Včasih tudi fazni kot rišemo s pomočjo asimptotskega poteka. Sestavimo ga iz nizkofrekvenčne asimptote 0° za  $\omega \leq \frac{1}{10T}$ , iz srednjefrekvenčne asimptote, ki gre



Slika 2.7: Diagram napake asimptotskega poteka člena 1. reda

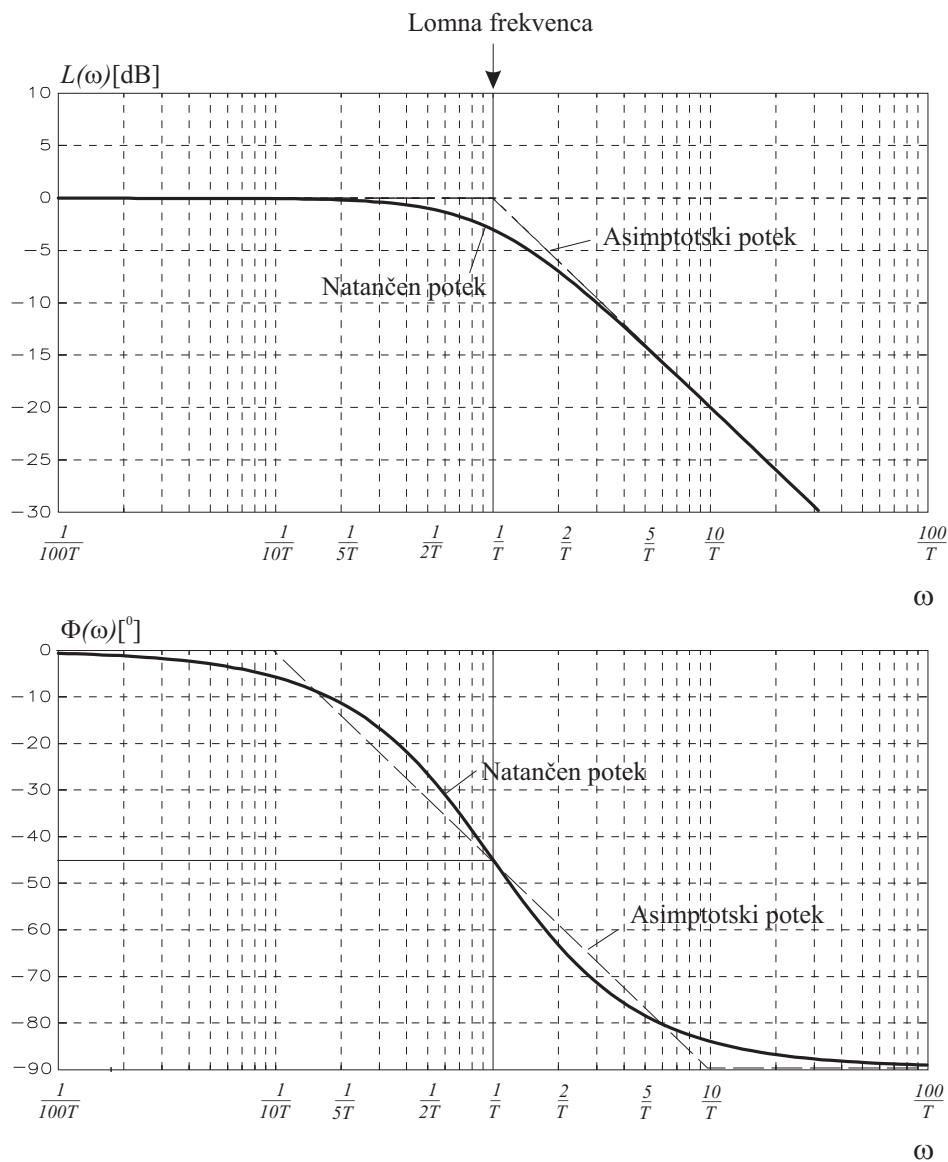
skozi točko  $-45^\circ$  pri  $\omega = \frac{1}{T}$  in povezuje nizkofrekvenčno in visokofrekvenčno asimptoto ter iz visokofrekvenčne asimptote  $-90^\circ$  za  $\omega \geq \frac{10}{T}$ . Za točnejšo določitev poteka nato upoštevamo, da je napaka asimptotskega poteka pri  $\omega = \frac{1}{T}$  enaka 0, pri  $\omega = \frac{1}{10T}$  je  $-5.7^\circ$  in pri  $\omega = \frac{10}{T}$  je  $5.7^\circ$ . Bodejev diagram člena 1. reda (asimptotski potek in natančen potek) prikazuje slika 2.8.

Za člen  $G(j\omega) = 1 + j\omega T$  pa velja

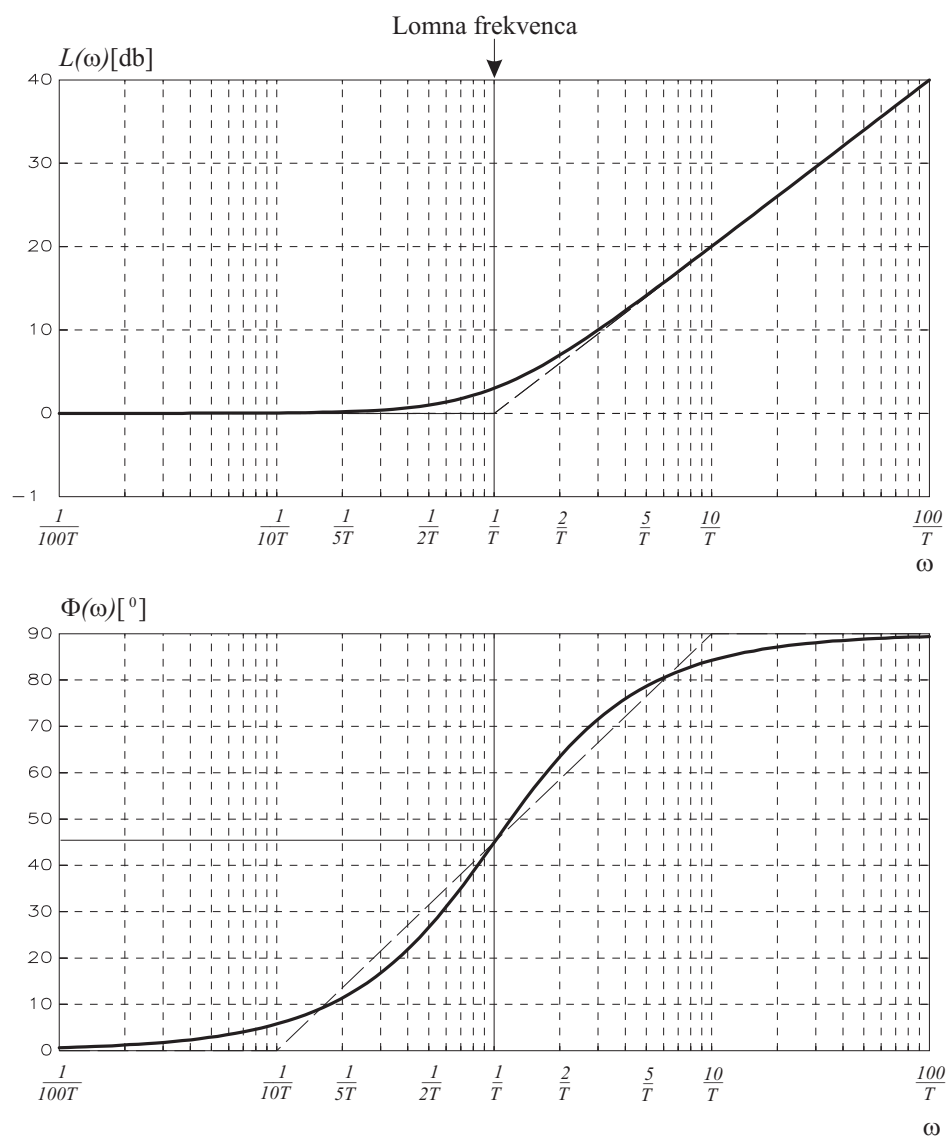
$$L(\omega) = 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} \quad (2.39)$$

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} = \arctan \omega T \quad (2.40)$$

Torej se izraza (2.39) in (2.40) ločita od izrazov (2.34) in (2.38) le po predznaku. Bodejev diagram člena  $1 + j\omega T$  prikazuje slika 2.9.



Slika 2.8: Bodejev diagram člena 1. reda  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

Slika 2.9: Bodejev diagram člena  $G(j\omega) = 1 + j\omega T$

### Bodejev diagram člena 2.reda

Frekvenčna karakteristika regulacijskega sistema pogosto vsebuje člen 2. reda

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (2.41)$$

Konstanto  $\zeta$  smo imenovali dušilni koeficient,  $\omega_n$  pa lastno frekvenco. Če je  $\zeta > 1$ , razdelimo izraz (2.41) v dva člena 1. reda, če pa je  $\zeta < 1$ , pa uporabimo postopek, ki ga bomo opisali. Logaritem absolutne vrednosti podaja enačba

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right| = \\ &= -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nizkofrekvenčno asimptoto dobimo za  $\omega \ll \omega_n$ . V tem primeru velja

$$L(\omega) \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad (2.43)$$

Visokofrekvenčno asimptoto pa dobimo z upoštevanjem  $\omega \gg \omega_n$

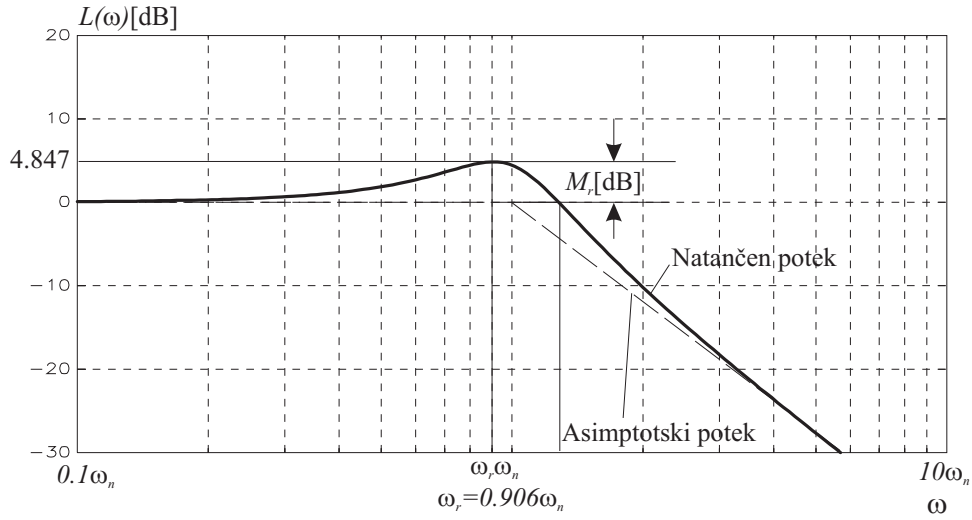
$$L(\omega) \doteq -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.44)$$

Nizkofrekvenčna asimptota je torej linija 0dB, visokofrekvenčna asimptota pa gre skozi točko  $L(\omega) = 0 \text{ dB}$  pri  $\omega = \omega_n$  (lomna frekvenca) in ima naklon -40dB/dek.

Asimptotski potek pa relativno slabo določa natančen potek v bližini frekvence  $\omega = \omega_n$ . V bližini te točke ima frekvenčna karakteristika pri *resonančni frekvenci*  $\omega_r$  *resonančni vrh*  $M_r$ . Medtem, ko asimptotski potek ni odvisen od dušilnega koeficienta  $\zeta$ , sta velikost resonančne frekvence  $\omega_r$  in resonančnega vrha  $M_r$  odvisna od  $\zeta$ . Natančen in asimptotski potek pri dušilnem koeficientu  $\zeta = 0.3$  prikazuje slika 2.10.

$\omega_r$  in  $M_r$  določimo tako, da poiščemo minimum funkcije, ki predstavlja argument izraza v enačbi (2.42)

$$F(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (2.45)$$



Slika 2.10: Logaritem absolutne vrednosti člena 2. reda ( $\zeta = 0.3$ )

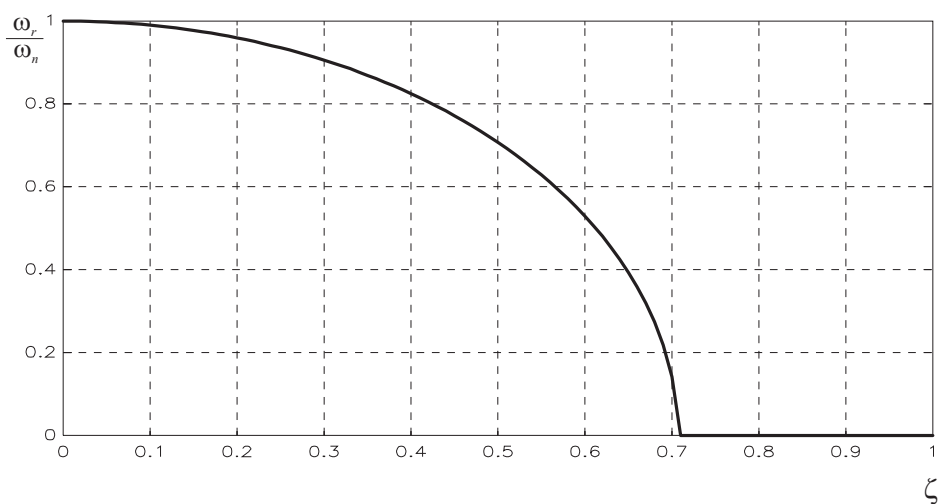
Če enačbo (2.45) odvajamo na  $\omega$  in odvod izenačimo z nič, dobimo resonančno frekvenco

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (0 \leq \zeta \leq 0.707) \quad (2.46)$$

Če se  $\zeta$  približuje nič, se resonančna frekvenca  $\omega_r$  približuje lastni frekvenci  $\omega_n$ . Za dušilni koeficient ( $0 \leq \zeta \leq 0.707$ ) je resonančna frekvenca  $\omega_r$  manjša od lastne frekvence  $\omega_n$  in tudi manjša od frekvence dušenega nihanja  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Pri dušilnem koeficientu  $\zeta > 0.707$  resonančni vrh ne nastopi. Odvisnost  $\frac{\omega_r}{\omega_n}$  od dušilnega koeficienta  $\zeta$  prikazuje slika 2.11.

Z upoštevanjem resonančne frekvence (2.46) izračunamo resonančni vrh s pomočjo enačbe (2.42)

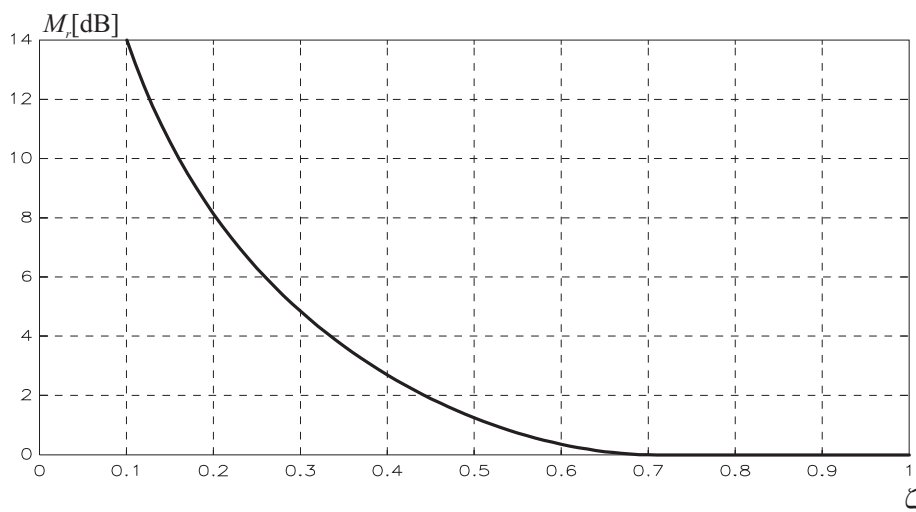
$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.47)$$

Slika 2.11: Odvisnost  $\frac{\omega_r}{\omega_n}$  od dušilnega koeficienta  $\zeta$ 

ali v dB

$$M_r [\text{dB}] = L(\omega)_{\max} = L(\omega_r) = 20 \log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.48)$$

Obe enačbi veljata za  $\zeta \leq 0.707$ . Za  $\zeta \geq 0.707$  je  $M_r = 1$ . Slika 2.12 prikazuje odvisnost  $M_r[\text{dB}]$  od dušilnega koeficienta.

Slika 2.12: Odvisnost  $M_r[\text{dB}]$  od dušilnega koeficienta  $\zeta$ 

Vidimo, da postane pri  $\zeta = 0$  resonančna frekvenca lastna frekvenca,  $M_r$  pa postane neskončen. Če torej sistem vzbujaemo z lastno frekvenco, je  $|G(j\omega)| = \infty$ .



Fazni kot člena 2. reda določa izraz

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} [G(j\omega)]}{\operatorname{Re} [G(j\omega)]} = -\arctan \left[ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad (2.49)$$

Fazni kot je odvisen od  $\zeta$  in  $\omega_n$ . Pri  $\omega \ll \omega_n$  je  $\Phi(\omega) \doteq 0^0$ , pri lomni frekvenci  $\omega = \omega_n$  pa je

$$\Phi = -\arctan \left( \frac{2\zeta}{0} \right) = -\arctan \infty = -90^0 \quad (2.50)$$

Pri  $\omega \gg \omega_n$  je fazni kot  $\Phi \doteq -180^0$ . Kot določimo z upoštevanjem enačbe (2.49) tako, da spremljamo potek imaginarne in realne komponente, ko gre  $\omega \rightarrow \infty$ . Tudi v tem primeru si lahko pomagamo z asimptotskim potekom. Pri  $\zeta > 0.5$  je smiselno sestaviti asimptotski potek iz nizkofrekvenčne asimptote  $0^0$ , visokofrekvenčne asimptote  $-180^0$  in iz srednjefrekvenčne asimptote, ki poteka skozi točko  $-90^0$  pri  $\omega = \omega_n$  ter se dotika nizkofrekvenčne asimptote pri  $\omega = 0.1\omega_n$  in visokofrekvenčne asimptote pri  $\omega = 10\omega_n$ . Pri  $\zeta \leq 0.5$  pa je smiselno namesto točk  $0.1\omega_n$  in  $10\omega_n$  uporabiti točki  $0.5\omega_n$  in  $2\omega_n$ .

Bodejeve diagrame členov 2. reda za različne dušilne koeficiente prikazuje slika 2.13.

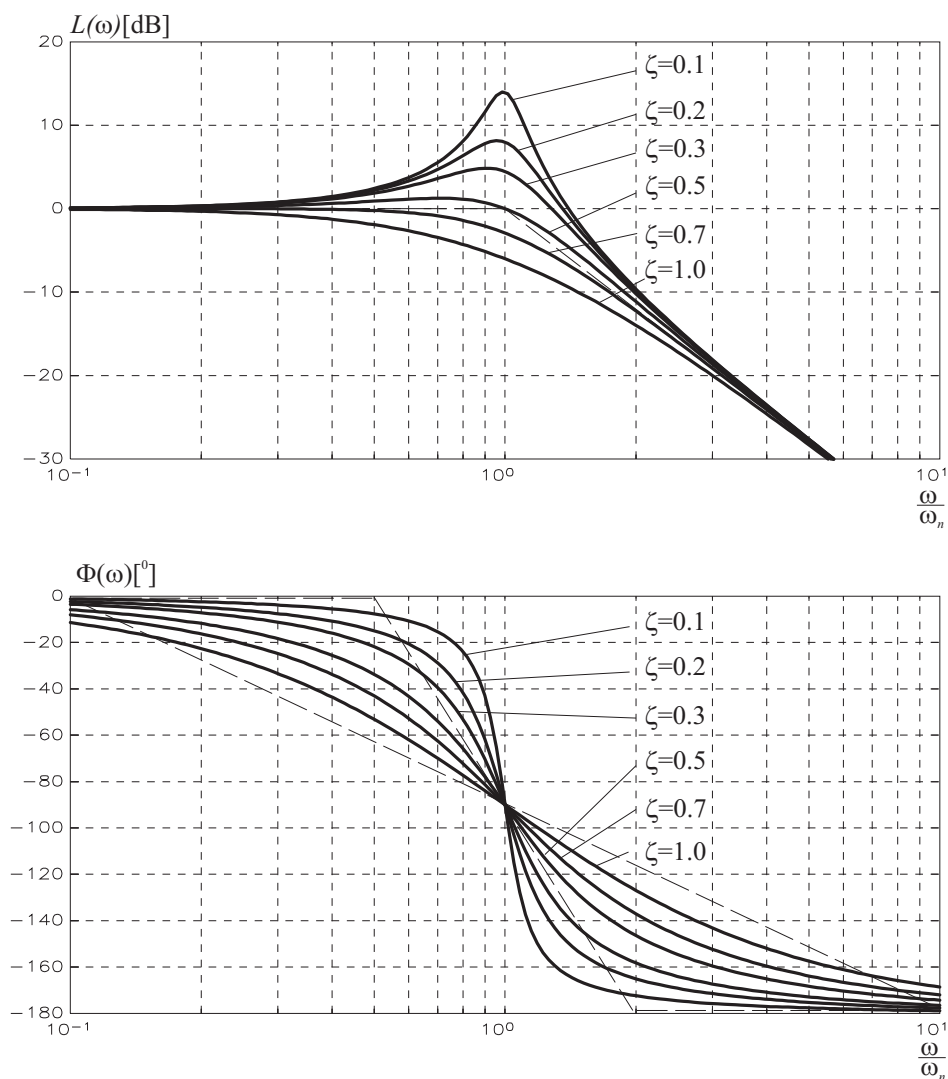
Bodejev diagram člena 2. reda narišemo tako, da najprej določimo lastno frekvenco  $\omega_n$  in dušilni koeficient  $\zeta$ , nakar uporabimo diagrame, ki jih prikazuje slika 2.13.

Bodejev diagram člena s frekvenčno karakteristiko

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (2.51)$$

dobimo tako, da za prej obravnavani primer upoštevamo obratni predznak tako logaritma absolutne vrednosti kot faznega kota.

**Primer 2.2** Določimo Bodejev diagram za sistem s prenosno funkcijo



Slika 2.13: Bodejevi diagrami členov 2.reda

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)} \quad (2.52)$$

Frekvenčno karakteristiko prenosne funkcije dobimo, če  $s$  zamenjamo z  $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega+2)((j\omega)^2+j\omega+2)} \quad (2.53)$$

Nato modificiramo zapis (2.53) v obliko, kjer imajo vsi členi ojačenje 1 (tako da je njihova nizkofrekvenčna asimptota 0dB), saj dobimo tako osnovne člene, ki smo jih obravnavali

$$G(j\omega) = \frac{7.5(1 + j\frac{\omega}{3})}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{2})(1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2})} \quad (2.54)$$

Vse člene, ki sestavljajo frekvenčno karakteristiko, smo ločeno obravnavali

1. člen 7.5
2. člen  $\frac{1}{j\omega}$
3. člen  $1 + j\frac{\omega}{3}$
4. člen  $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{2}}$
5. člen  $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}}$

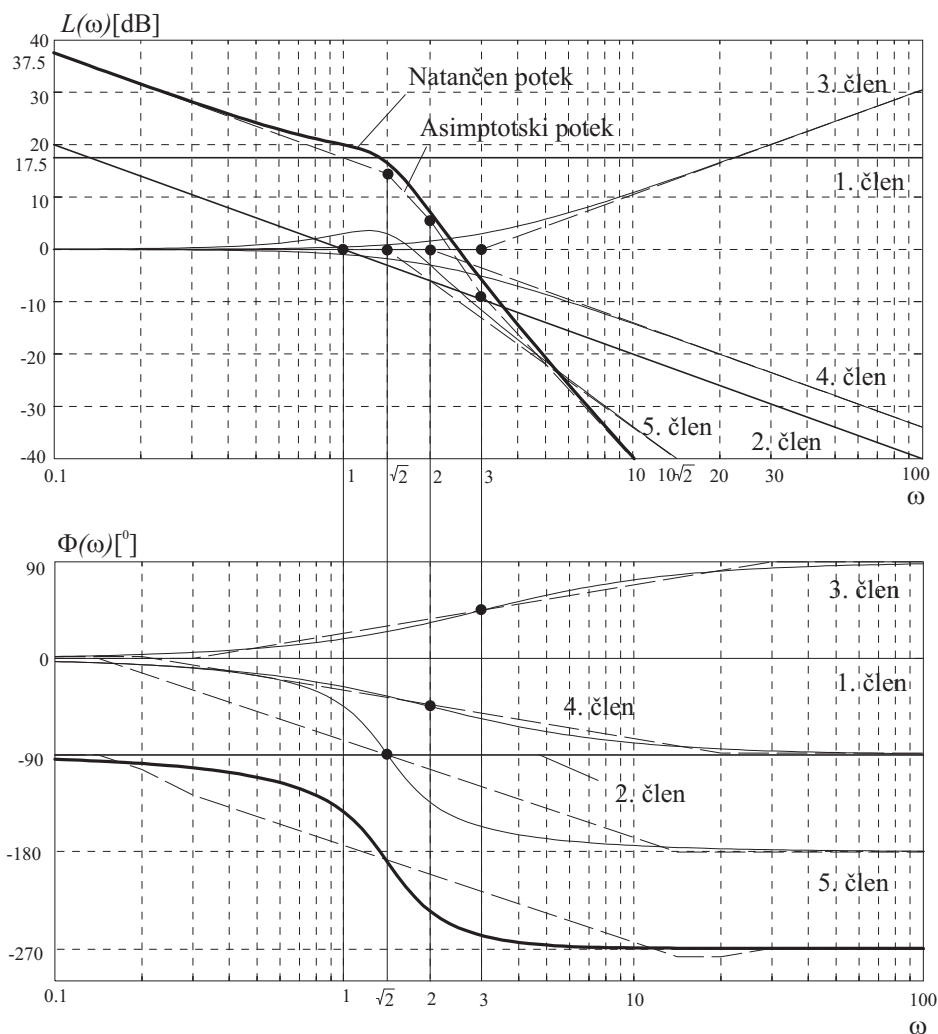
Iz zapisov posameznih členov določimo lomne frekvence za tretji, četrti in peti člen:  $\omega = 3$ ,  $\omega = 2$ ,  $\omega = \omega_n = \sqrt{2}$ . Iz zapisa za peti člen dobimo tudi dušilni koeficient  $\zeta = \frac{1}{4}\omega_n = 0.3536$ .

Nato narišemo asimptotične poteke posameznih členov. Pri seštevanju se nakloni akumulirajo. Tako je naklon za frekvence manjše od  $\sqrt{2}$  -20dB/dek, pri  $\omega = \sqrt{2}$  se poveča na -60dB/dek, pri  $\omega = 2$  se poveča na -80dB/dek, pri  $\omega = 3$  pa začne učinkovati člen  $1 + j\frac{\omega}{3}$  in naklon se zmanjša na -60dB/dek. Za točnejše risanje lahko upoštevamo korekcije glede na asimptotski potek (3dB v lomnih frekvencah, 1dB v frekvencah levo ali desno za eno oktavo za člene 1. reda, za kvadratični člen pa uporabimo diagram 2.13).

Tako kot logaritem absolutne vrednosti frekvenčnega poteka dobimo tudi fazni potek s seštevanjem posameznih prispevkov.

Bodejev diagram prikazuje slika 2.14.

□



Slika 2.14: Bodejev diagram

### 2.2.2 Značilnosti fazno minimalnih in fazno neminimalnih sistemov

Za fazno minimalne sisteme je značilno, da lahko fazni diagram določimo iz diagrama absolutne vrednosti frekvenčne karakteristike. To velja v primeru:

- če ima sistem vse pole in ničle v levi polravnini in
- če prenosna funkcija nima mrtvega časa.

Za fazno minimalne sisteme je značilno, da je fazni kot pri  $\omega = \infty$  enak

$$\Phi = -90^0(n - m) \quad (2.55)$$

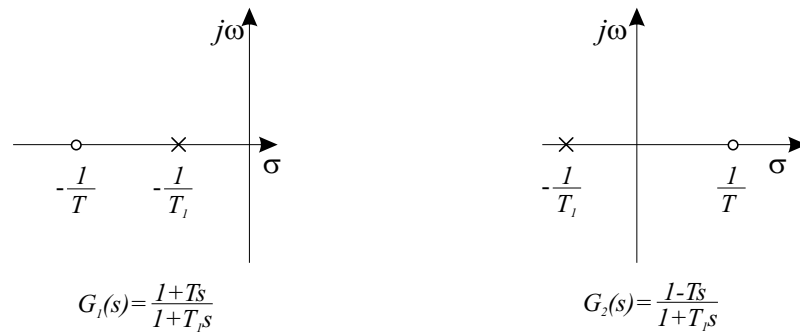
pri čemer je  $n$  red imenovalca in  $m$  red števca prenosne funkcije. To za sisteme z neminimalno fazo ne velja. Pač pa za obe vrsti sistemov velja, da je naklon logaritma absolutne vrednosti pri visokih frekvencah enak

$$-20(n - m) \text{ [dB/dek]} \quad (2.56)$$

Oglejmo si primerjavo dveh sistemov, od katerih ima prvi minimalno, drugi pa neminimalno fazo.

$$\begin{aligned} G_1(j\omega) &= \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1} \\ G_2(j\omega) &= \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad 0 < T < T_1 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Lego polov in ničel obeh sistemov prikazuje slika 2.15



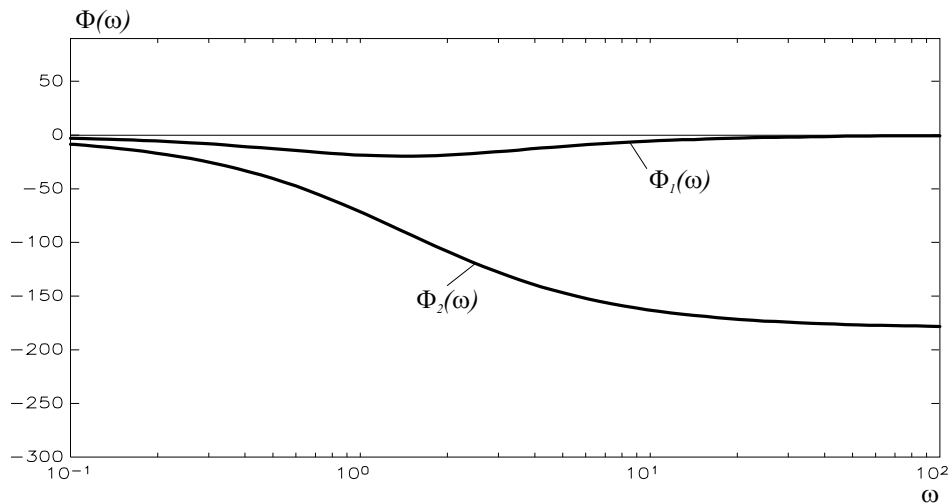
Slika 2.15: Lega polov in ničel sistemov z minimalno in neminimalno fazo

Medtem ko imata oba sistema enako karakteristiko  $L(\omega)$ , pa se fazni karakteristiki razlikujeta:

$$\Phi_1(\omega) = \arctan \omega T - \arctan \omega T_1 \quad (2.58)$$

$$\Phi_2(\omega) = \arctan(-\omega T) - \arctan \omega T_1 = -\arctan \omega T - \arctan \omega T_1 \quad (2.59)$$

Fazni karakteristiki obeh sistemov pri  $T = 0.5$  in  $T_1 = 1$  prikazuje slika 2.16.

Slika 2.16: Fazni karakteristiki sistemov z minimalno ( $\Phi_1(\omega)$ ) in neminimalno fazo ( $\Phi_2(\omega)$ )

Tudi sistemi z mrtvim časom spadajo med sisteme z neminimalno fazo. Mrtvi čas imajo često termični, hidravlični in pnevmatski sistemi. Za primer si oglejmo sistem s frekvenčno karakteristiko

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T_m}}{1 + j\omega T} \quad (2.60)$$

Bodejev diagram je določen z enačbama

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |e^{-j\omega T_m}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \\ &= 0 + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \\ \Phi(\omega) &= \angle[e^{-j\omega T_m}] + \angle \left[ \frac{1}{1 + j\omega T} \right] = -\omega T_m - \arctan \omega T \end{aligned} \quad (2.61)$$

Mrtvi čas torej ne vpliva na absolutno vrednost, vpliva pa na fazni kot. Prispeva frekvenci sorazmeren negativni fazni zasuk.

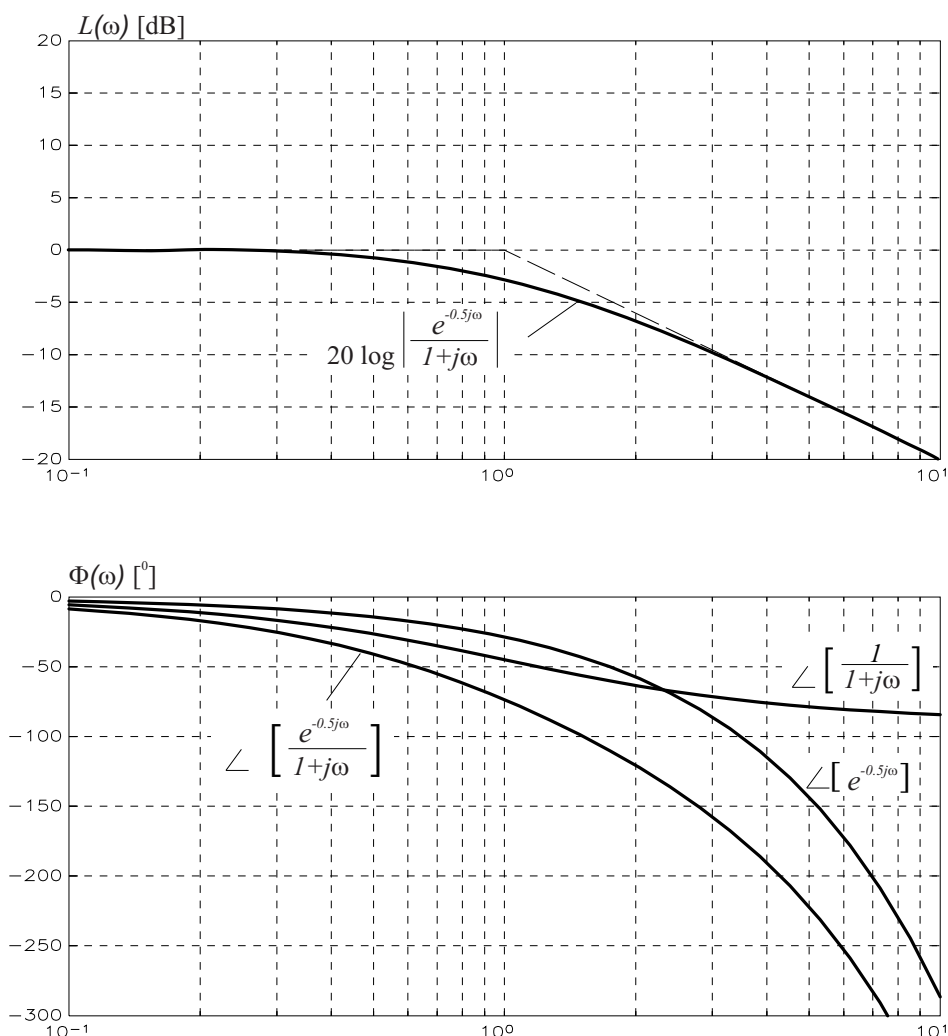
Bodejev diagram za  $T_m = 0.5$  in  $T = 1$  prikazuje slika 2.17.

### 2.2.3 Določitev prenosne funkcije iz Bodejevega diagrama

Bodejev diagram nekega linearne, časovno nespremenljivega sistema lahko dokaj enostavno določimo eksperimentalno, tako da sistem vzbujamo s sinusnim signalom in merimo amplitudo in fazo izhodnega signala v ustaljenem stanju. Če te meritve ponovimo pri različnih frekvencah, lahko narišemo  $L(\omega)$  in  $\Phi(\omega)$ .

S pomočjo eksperimentalno dobljenega Bodejevega diagrama pa lahko dokaj enostavno pridemo do prenosne funkcije sistema. Postopek je znan kot identifikacija. Pri tem uporabimo naslednja pravila:

1. Določimo vrsto sistema s pomočjo naklona  $L(\omega)$  pri nizkih frekvencah. Če je sistem 0. vrste, ima naklon 0dB/dek, če je 1. vrste ima naklon -20dB/dek, če je 2. vrste -40dB/dek, ...
2. Če se naklon karakteristike  $L(\omega)$  spremeni, pomeni, da ima v tisti točki nek člen lomno frekvenco. Če se naklon spremeni pri frekvenci  $\frac{1}{T}$  za -20dB/dek, imamo člen  $\frac{1}{Ts+1}$ , če pa se naklon spremeni za +20dB/dek, imamo člen



Slika 2.17: Bodejev diagram sistema z mrtvim časom

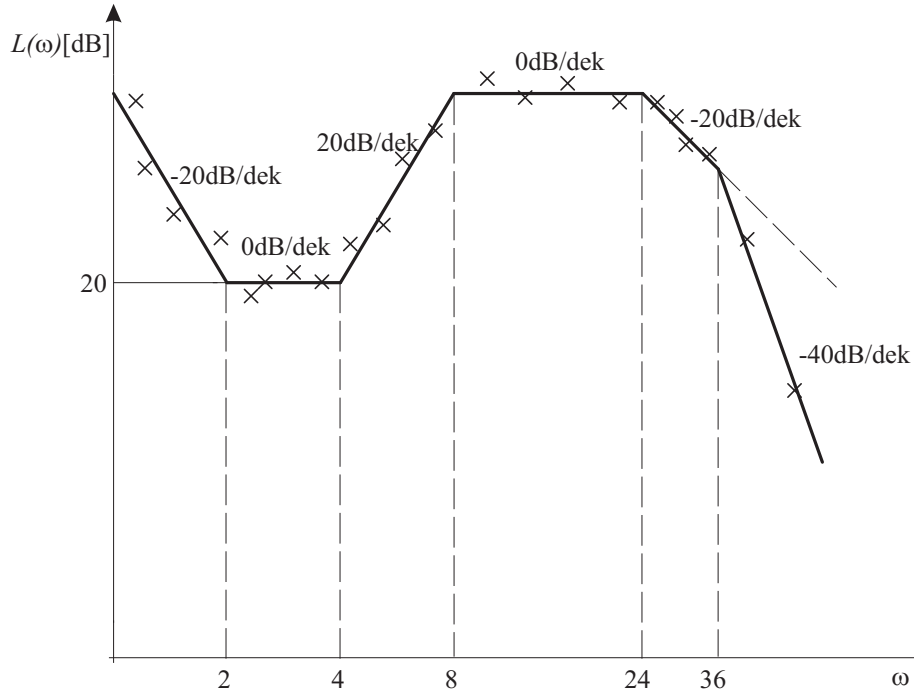
$Ts + 1$ . Sprememba naklona za  $\pm 40$  dB pa pomeni, da je prisoten člen 2. reda. V tem primeru je potrebno določiti, ali gre za člen z dvojnimi realnimi korenoma ( $\zeta > 1$ ) ali za člen s konjugirano kompleksnim parom korenov ( $\zeta < 1$ ). Za točno določitev je običajno potrebno narediti dodatne meritve v okolici frekvence, kjer se naklon spremeni za  $\pm 40$  dB (s tem določimo  $\zeta$  in  $\omega_n$  pri  $\zeta < 1$ ).

3. Iz znanih členov napišemo prenosno funkcijo in končno določimo ojačenje, tako da zadovoljimo neko pomembnejšo testno točko.

**Primer 2.3** Iz eksperimentalno dobljenega Bodejevega diagrama, ki ga prikazuje



slika 2.18, določimo prenosno funkcijo.



Slika 2.18: Logaritem absolutne vrednosti za določitev prenosne funkcije

Skozi merjene točke potegnemo asimptotski diagram logaritma absolutne vrednosti. Določimo naklone. Zaradi naklona  $-20\text{dB/dek}$  pri nizkih frekvencah je sistem 1. vrste. Nato določimo lomne frekvence: 2, 4, 8, 24, 36. Z upoštevanjem točke 2 napišemo prenosno funkcijo

$$G(s) = K \frac{(\frac{1}{2}s + 1)(\frac{1}{4}s + 1)}{s(\frac{1}{8}s + 1)(\frac{1}{24}s + 1)(\frac{1}{36}s + 1)} \quad (2.62)$$

$K$  določimo iz nizkofrekvenčnega dela karakteristike. Ker velja pri  $\omega = 2$

$$L(\omega) \doteq 20 \log \frac{K}{\omega} \bigg|_{\omega=2} = 20 \text{ dB} \quad (2.63)$$

je ojačenje  $K$

$$K = 20 \quad (2.64)$$

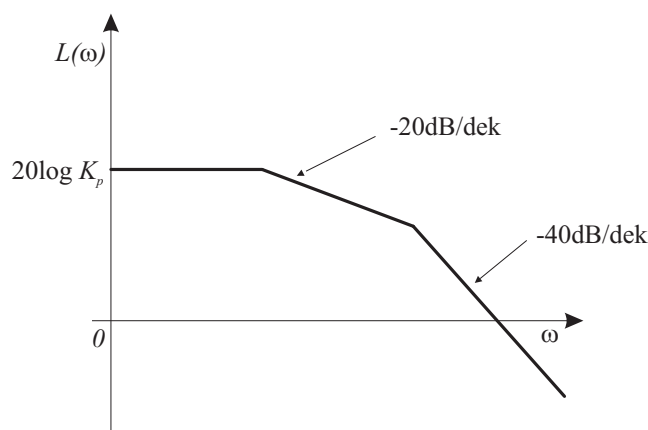
□

Obravnavani postopek se precej zakomplicira, če sistem nima minimalne faze (poli ali ničle v desni polravnini, mrtvi čas). Za tak sistem je značilno, da karakteristiki absolutne vrednosti ne pripada enoumno določljiva fazna karakteristika. Ali je sistem minimalno fazen ali ne, lahko določimo na naslednji način: primerjamo iz meritev dobljeno fazno karakteristiko s fazno karakteristiko, ki jo določimo iz eksperimentalno dobljene prenosne funkcije. Če se kolikor toliko ujemata, ima sistem minimalno fazo.

### 2.2.4 Določitev konstant pogreškov iz Bodejevega diagrama

Omenili smo, da je iz karakteristike  $L(\omega)$  možno enostavno določiti vrsto sistema. Če imamo pri tem opravka z odprtozanko prenosno funkcijo regulacijskega sistema  $G(s)H(s)$ , je za določeno vrsto sistema pomembna in končna le ena konstanta pogreška. S pomočjo konstant pogreška ovrednotimo pogrešek v ustaljenem stanju pri določenem referenčnem signalu.

Konstante pogreška ovrednotimo iz diagrama  $L(\omega)$  z analizo pri nizkih frekvencah. Slika 2.19 prikazuje  $L(\omega)$  za sistem ničte vrste.



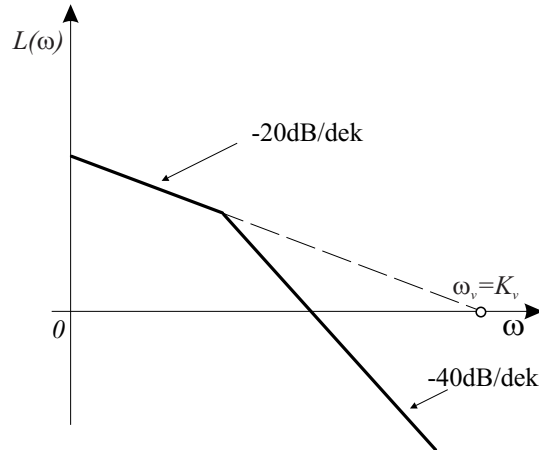
Slika 2.19: Logaritem absolutne vrednosti pri sistemu ničte vrste

Ker je konstanta pozicijskega pogreška

$$K_p = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) \quad (2.65)$$

jo določimo iz nizkofrekvenčne asimptote  $20 \log K_p$ .

Slika 2.20 prikazuje  $L(\omega)$  za sistem 1. vrste. Za nizke frekvence velja



Slika 2.20: Logaritem absolutne vrednosti pri sistemu prve vrste

$$G(j\omega)H(j\omega) \doteq \frac{K_v}{j\omega} \quad (2.66)$$

pri čemer je  $K_v$  konstanta hitrostnega pogreška.

Če podaljšamo potek pri nizkih frekvencah, je presečišče z linijo 0 dB določeno z enačbo

$$20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=\omega_v} = 0 \quad (2.67)$$

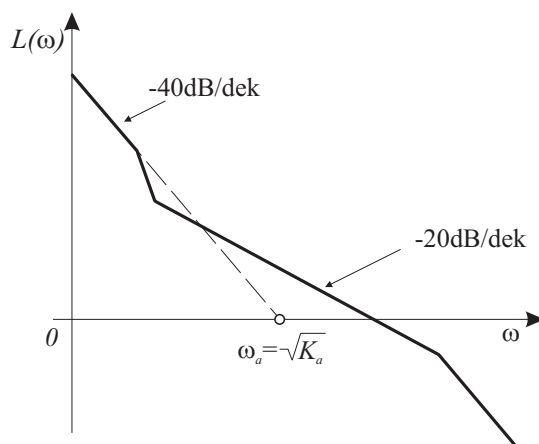
iz česar sledi

$$K_v = \omega_v \quad (2.68)$$

Frekvenca presečišča predstavlja kar konstanto hitrostnega pogreška.

Slika 2.21 prikazuje sistem 2. vrste, za katerega je karakteristična konstanta pospeškovnega pogreška  $K_a$

Frekvenčna karakteristika takega sistema je za nizke frekvence podana z izrazom



Slika 2.21: Logaritem absolutne vrednosti sistema 2. vrste

$$G(j\omega)H(j\omega) \doteq \frac{K_a}{(j\omega)^2} \quad (2.69)$$

Če podaljšamo potek pri nizkih frekvencah, je presečišče z linijo 0 dB določeno z enačbo

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=\omega_a} = 0 \quad (2.70)$$

iz česar sledi

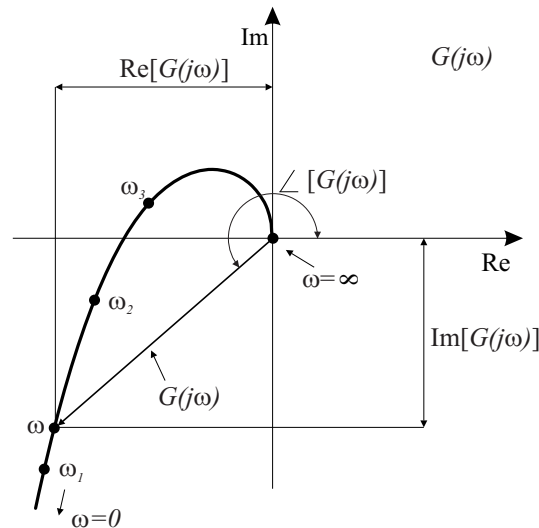
$$K_a = \omega_a^2 \quad (2.71)$$

Torej je konstanta pospeškovnega pogreška podana s kvadratom frekvence, ki jo določa presečišče.

## 2.3 Polarni diagram

Polarni diagram predstavlja frekvenčno karakteristiko  $G(j\omega)$  v kompleksni ravnini. Vsaka točka je podana s polarnim zapisom kompleksorja  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle[G(j\omega)]}$  pri določeni frekvenci. Če se le ta spreminja od 0 do  $\infty$ , zariše kompleksor polarni diagram. Pozitivni fazni kot je definiran kot kot od pozitivne realne osi proti

določenemu kompleksorju v obratni smeri urinega kazalca. Primer polarnega diagrama prikazuje slika 2.22.



Slika 2.22: Polarni diagram

Določitev polarnega diagrama je nekoliko zahtevnejši postopek kot npr. računanje Bodejevega diagrama, saj absolutne vrednosti v tem primeru ne moremo dobiti s seštevanjem prispevkov posameznih gradnikov. Zato se včasih posredno uporablja Bodejev diagram tudi za določitev polarnega diagrama. Običajno pa dandanes določamo tako polarni diagram kot tudi druge oblike frekvenčne karakteristike z ustreznimi računalniškimi paketi.

### 2.3.1 Polarni diagrami osnovnih členov

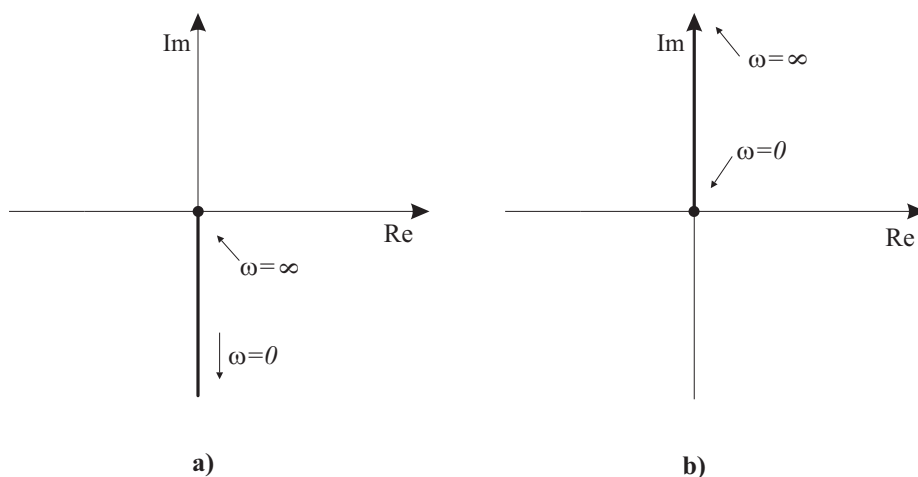
Podobno kot pri Bodejevem diagramu si bomo tudi tu ogledali diagrame naslednjih osnovnih členov: integrirni oz. diferencirni člen, člen 1. reda in člen 2. reda.

#### Polarni diagram integrirnega in diferencirnega člena

Polarni diagram frekvenčne karakteristike  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$  je negativna imaginarna os, saj velja

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{j(-90^\circ)} \quad (2.72)$$

Polarni diagram  $G(j\omega) = j\omega$  pa je pozitivna imaginarna os. Slika 2.23 prikazuje omenjena diagrama.



Slika 2.23: Polarna diagrama a) integrirni člen  
b) diferencirni člen

### Polarni diagram člena 1. reda

Polarni diagram sistema, katerega frekvenčna karakteristika je  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ , podaja enačba

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{j(-\arctan \omega T)} \quad (2.73)$$

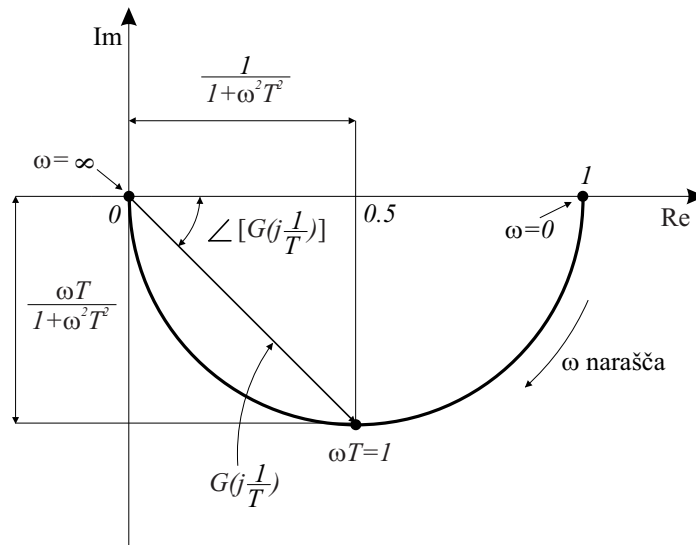
Določimo nekaj karakterističnih točk. Pri  $\omega = 0$ ,  $\omega = \frac{1}{T}$  in  $\omega = \infty$  je vrednost frekvenčne karakteristike

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1e^{j0^\circ} \quad (2.74)$$

$$G(j\frac{1}{T}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j(-45^\circ)} \quad (2.75)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0e^{j(-90^\circ)} \quad (2.76)$$

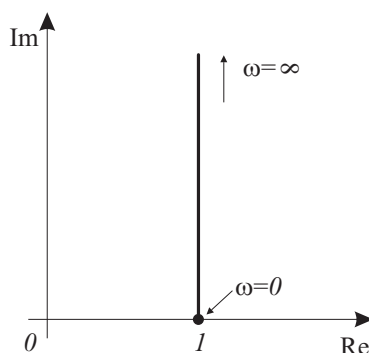
Polarni diagram sistema 1. reda prikazuje slika 2.24.



Slika 2.24: Polarni diagram člena  $\frac{1}{1+j\omega T}$

Enostavno se da dokazati, da polarni diagram poteka po krogu, ki ima središče na realni osi v točki  $\frac{1}{2}$  in ima polmer  $\frac{1}{2}$ .

Polarni diagram člena  $G(j\omega) = 1 + j\omega T$  je povsem drugačen od prejšnjega člena. Prikazuje ga slika 2.25.

Slika 2.25: Polarni diagram člena  $1 + j\omega T$ 

### Polarni diagram člena drugega reda

Polarni diagram sistema s frekvenčno karakteristiko

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.77)$$

ima karakteristični točki pri  $\omega = 0$  in  $\omega = \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1e^{j0^\circ} \quad (2.78)$$

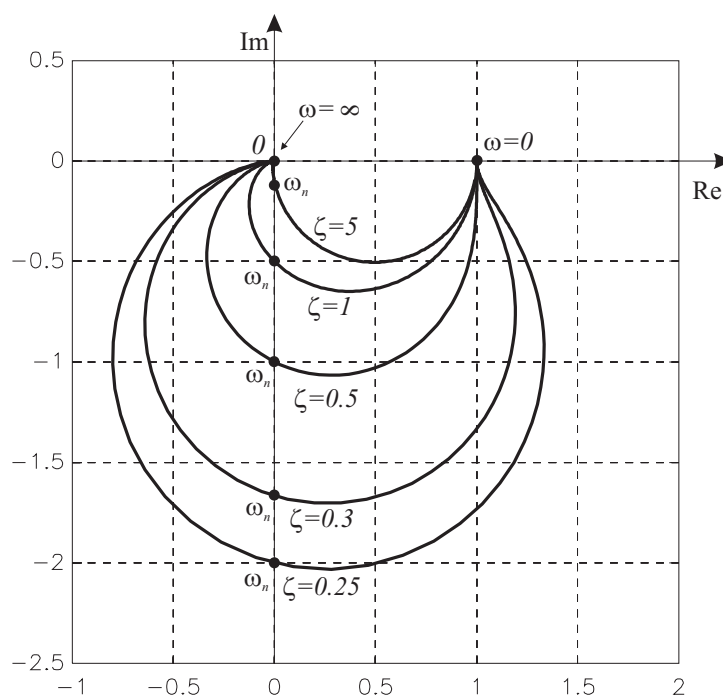
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0e^{j(-180^\circ)} \quad (2.79)$$

Torej začne polarni diagram v točki  $1e^{j0^\circ}$  in končuje v točki  $0e^{j(-180^\circ)}$ . Zato predstavlja negativna realna os tangento na polarni diagram pri  $\omega \rightarrow \infty$ . Slika 2.26 prikazuje družino polarnih diagramov za različne dušilne koeficiente pri  $\omega_n = 1$ .

Oblika polarnega diagrama zavisi od dušilnega koeficienta  $\zeta$ . Ker je vrednost frekvenčne karakteristike pri lastni frekvenci  $\omega = \omega_n$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j2\zeta} = \frac{1}{2\zeta} e^{-j90^\circ} \quad (2.80)$$





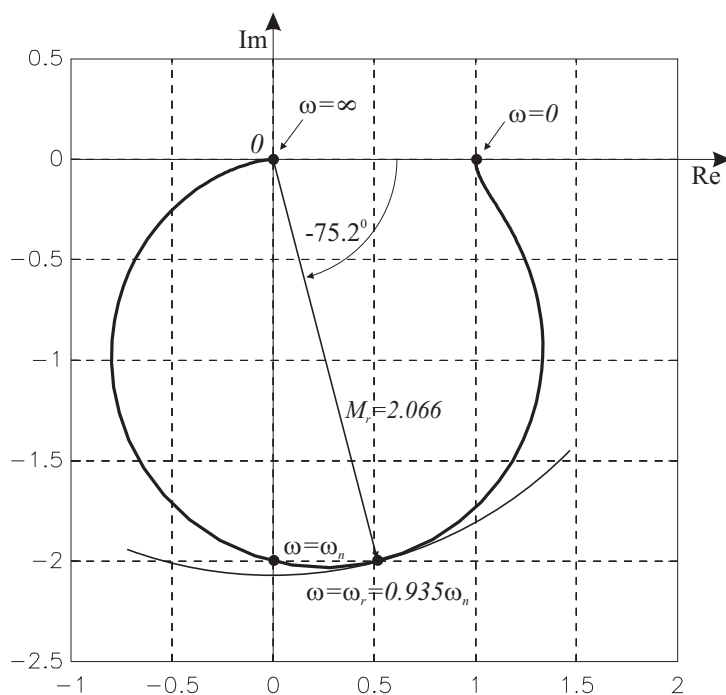
Slika 2.26: Polarni diagrami člena  $\frac{1}{1+2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n})+(j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

ima ustrezna točka v polarnem diagramu absolutno vrednost  $\frac{1}{2\zeta}$  in fazni kot  $-90^\circ$ . V tej točki polarni diagram seka imaginarno os.

Pri obravnavanju Bodejevega diagrama smo spoznali, da ima frekvenčna karakteristika pri  $\zeta \leq 0.707$  resonančni vrh pri resonančni frekvenci. V polarnem diagramu resonančni frekvenci ustreza točka, ki je najbolj oddaljena od koordinatnega izhodišča. Resonančni vrh  $M_r$  pa je razmerje med absolutno vrednostjo te točke in točke, ki jo določa frekvenca  $\omega = 0$ . Ustrezne razmere za  $\zeta = 0.25$  prikazuje slika 2.27.

Za nadkritično dušen sistem postane polarni diagram za  $\zeta \gg 1$  podoben kot pri členu 1. reda, t.j. v obliki polkroga. Pri naraščajočem  $\zeta$  namreč dobimo dva realna korena, ki se vse bolj razlikujeta in ker večjega lahko zanemarimo, se sistem vede kot sistem 1. reda.

Če se člen 2. reda nahaja v števcu, je pripadajoča frekvenčna karakteristika

Slika 2.27: Resonančna frekvenca in resonančni vrh ( $\zeta = 0.25$ )

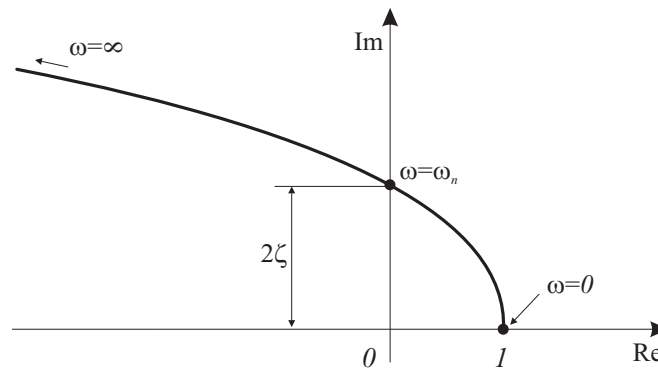
$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= 1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = \\
 &= \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left( \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right)
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Karakteristični točki polarnega diagrama podajata enačbi

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1e^{j0^\circ} \tag{2.82}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty e^{j180^\circ} \tag{2.83}$$

Imaginarna komponenta monotonno narašča z naraščajočim  $\omega$ , realna komponenta pa monotonno upada od vrednosti 1. Polarni diagram prikazuje slika 2.28.

Slika 2.28: Polarni diagram člena  $1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2$ **Polarni diagram sistema 1. vrste**

Sistem 1. vrste ima frekvenčno karakteristiko

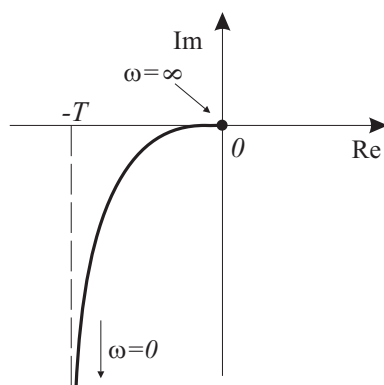
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)} \quad (2.84)$$

Karakteristični točki za  $\omega = 0$  in  $\omega = \infty$  sta

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty e^{j(-90^\circ)} \quad (2.85)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = -0 - j0 = 0 e^{j(-180^\circ)} \quad (2.86)$$

Pri sistemih vrste večje od nič začne polarni diagram pri  $\omega = 0$  v neskončnosti. Točnejši potek določa t.i. *nizkofrekvenčna asimptota* (v tem primeru  $-T$ ). Ustrezni polarni diagram prikazuje slika 2.29.



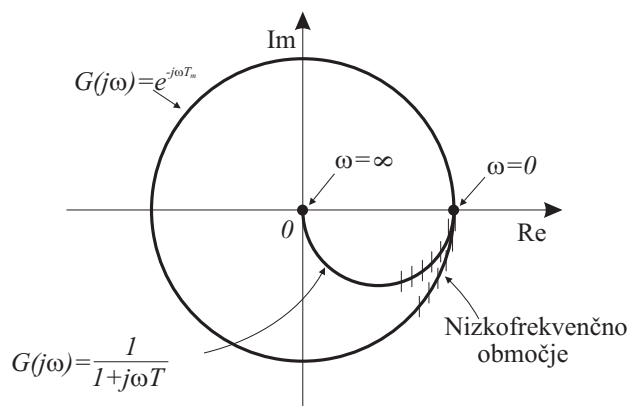
Slika 2.29: Polarni diagram sistema 1. vrste

### Polarni diagram sistema z mrtvim časom

Frekvenčna karakteristika sistema z mrtvim časom je

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_m} \quad (2.87)$$

Mrtvi čas v frekvenčni karakteristiki prispeva le k faznemu kotu, medtem ko je absolutna vrednost enaka ena. Slika 2.30 prikazuje polarni diagram sistema z mrtvim časom in sistema 1. reda.



Slika 2.30: Polarna diagrama sistema z mrtvim časom in sistema 1. reda

Ker imata v nizkofrekvenčnem področju oba sistema podoben frekvenčni potek, je upravičena nam že znana aproksimacija

$$e^{-sT} \doteq \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.88)$$

Sistem 1. reda z mrtvim časom pa ima frekvenčno karakteristiko

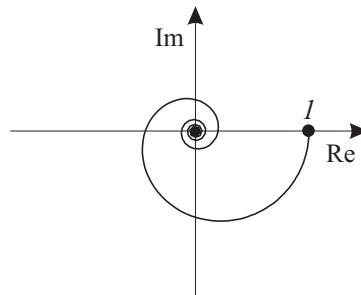
$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T_m}}{1 + j\omega T} \quad (2.89)$$

Absolutna vrednost in fazni kot sta določena z enačbama

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad (2.90)$$

$$\angle[G(j\omega)] = -\omega T_m - \arctan \omega T \quad (2.91)$$

Polarni diagram sistema z mrtvim časom prikazuje slika 2.31.



Slika 2.31: Polarni diagram sistema 1. reda z mrtvim časom

Do tega diagrama nazorno pridemo, če upoštevamo sliko 2.30. Karakteristika polarnega diagrama za čisti mrtvi čas se spremeni v spiralo, ker gre absolutna vrednost sistema 1. reda proti nič.

### 2.3.2 Splošne značilnosti polarnih diagramov

Za sistem, katerega frekvenčna karakteristika je podana z enačbo

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K(1 + j\omega T_{b_1})(1 + j\omega T_{b_2}) \dots}{(j\omega)^l(1 + j\omega T_{a_1})(1 + j\omega T_{a_2}) \dots} = \\ &= \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \end{aligned} \quad (2.92)$$

pri čemer velja  $n > m$ , bomo podali nekaj splošnih lastnosti, navodil oz. zaključkov.

1.  $l=0$  sistem ničte vrste

Začetna točka pri  $\omega = 0$  je na pozitivni realni osi. Tangenta v tej točki je pravokotna na realno os. Končna točka za  $\omega = \infty$  je v koordinatnem izhodišču. Ena od koordinatnih osi predstavlja tangento na polarni diagram v koordinatnem izhodišču (pri  $\omega = \infty$ ).

2.  $l=1$  sistem 1. vrste

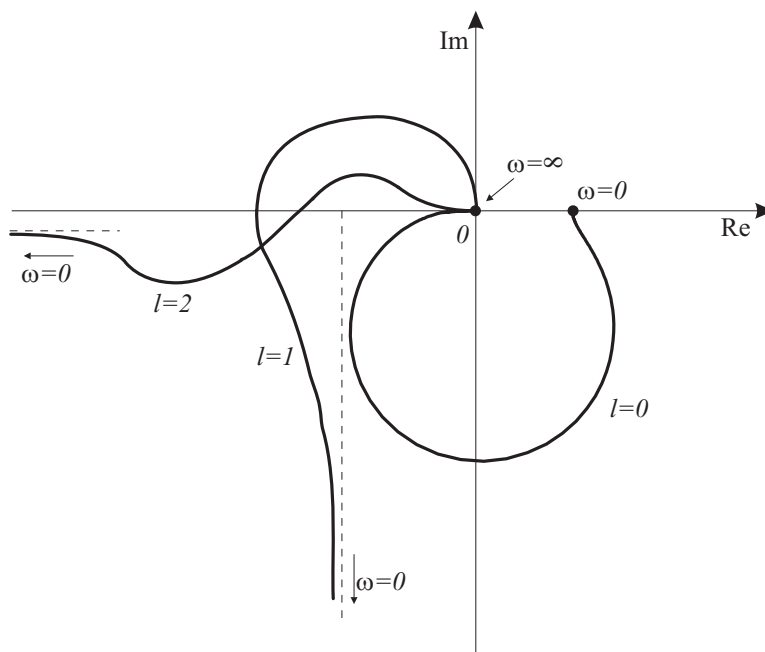
Člen  $j\omega$  v imenovalcu prispeva fazni kot  $-90^\circ$  na celotnem frekvenčnem območju. Pri  $\omega = 0$  je absolutna vrednost neskončna, fazni kot  $-90^\circ$ , polarni diagram pa se približuje asimptoti, ki je paralelna negativni imaginarni osi. Pri  $\omega = \infty$  konča diagram v koordinatnem izhodišču, kamor vstopa tangencialno glede na eno izmed koordinatnih osi.

3.  $l \geq 2$

Člen  $(j\omega)^l$  daje fazni kot  $-l \cdot 90^\circ$ . Zato je pri  $\omega = 0$  absolutna vrednost neskončna, faza pa je  $-l \cdot 90^\circ$ . To je tudi kot, ki določa nizkofrekvenčno asimptoto, ki je vzporedna z eno izmed koordinatnih osi. Pri  $\omega = \infty$  je absolutna vrednost nič, krivulja pa vstopa v koordinatno izhodišče tangencialno na eno izmed koordinatnih osi.

Slika 2.32 prikazuje karakteristične polarne diagrame za sisteme 0., 1. in 2. vrste.

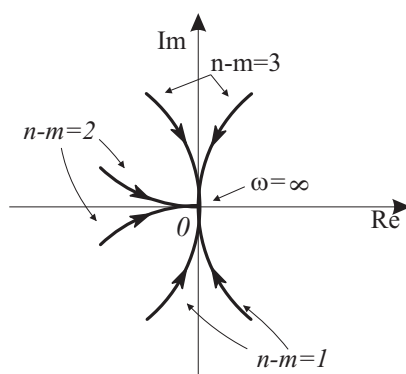
Polarni diagrami pri pogoju  $n > m$  vedno zaključijo v koordinatnem izhodišču. Ker za  $\omega \rightarrow \infty$  velja



Slika 2.32: Polarni diagrami sistemov 0., 1. in 2. vrste

$$G(j\omega) \doteq \frac{b_0(j\omega)^m}{a_0(j\omega)^n} = \frac{b_0}{a_0}(j\omega)^{-(n-m)} \quad (2.93)$$

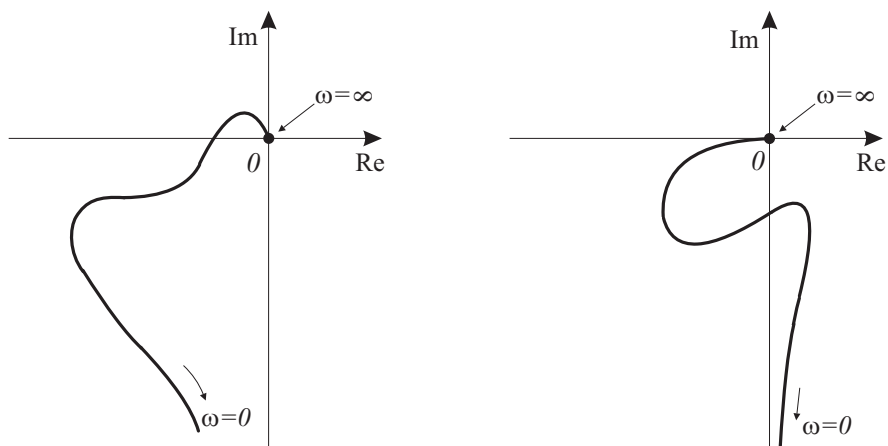
je fazni kot odvisen od razlike  $n - m$  oz. je  $-(n - m) \cdot 90^\circ$ . Slika 2.33 prikazuje potek polarnih diagramov pri visokih frekvencah za različne  $n - m$ .



Slika 2.33: Potek polarnih diagramov pri visokih frekvencah

V primeru  $n = m$  se polarni diagram ne zaključuje v koordinatnem izhodišču.

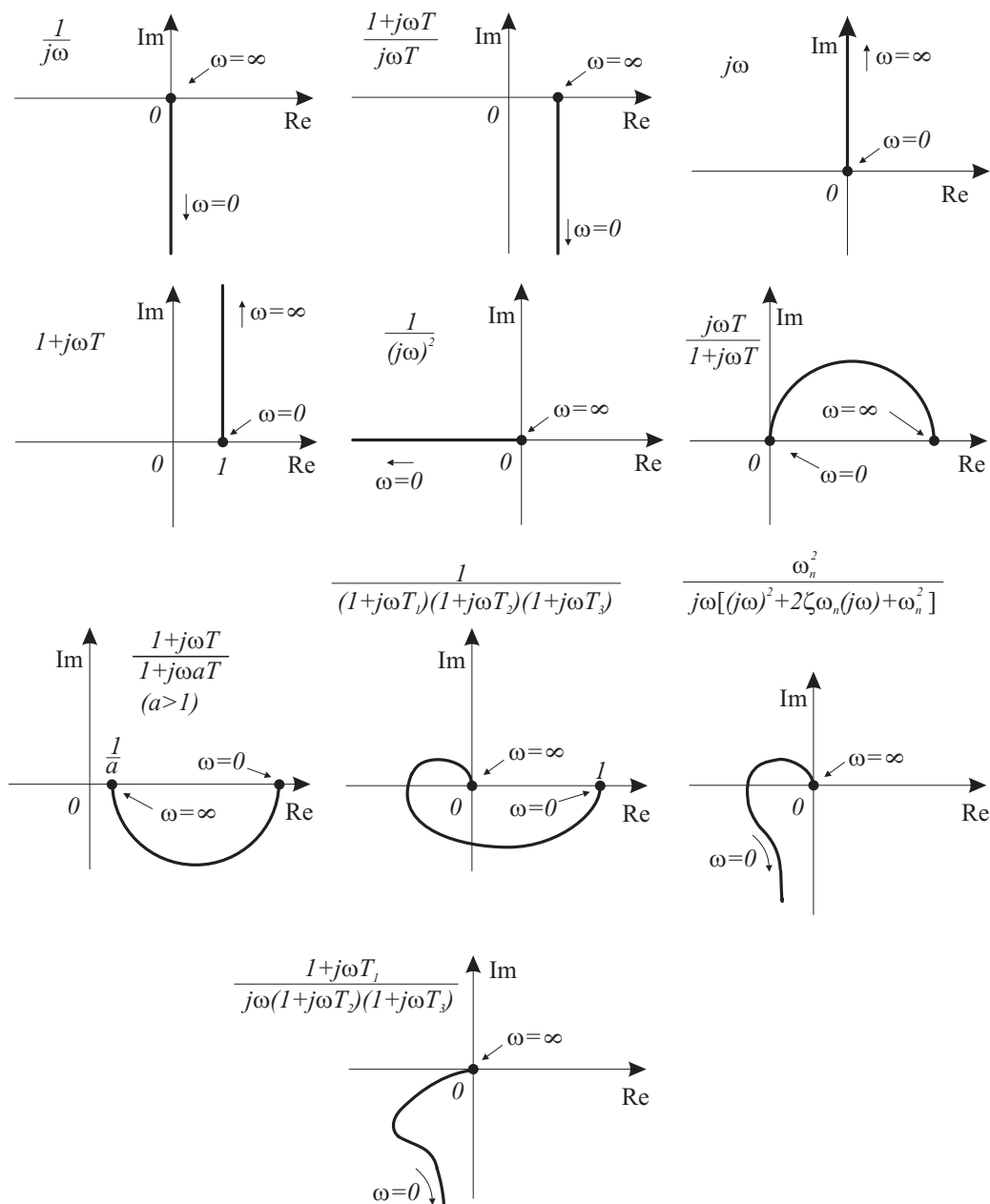
Potrebno je tudi omeniti, da so bolj komplicirani poteki polarnih diagramov posledica večje dinamike števca oz. večjega števila ničel prenosne funkcije. Primera prikazuje slika 2.34.



Slika 2.34: Polarna diagrama prenosnih funkcij z večjim številom ničel



Polarne diagrame nekaterih enostavnejših prenosnih funkcij oz. frekvenčnih karakteristik prikazuje slika 2.35.



Slika 2.35: Polarni diagrami nekaterih enostavnejših sistemov

## 2.4 Nicholsov diagram

Frekvenčno karakteristiko lahko predstavimo tudi v diagramu, v katerem na abscisno os nanašamo fazni kot, na ordinatno os pa logaritem absolutne vrednosti ( $20 \log |G(j\omega)|$ ). Diagram opremimo s frekvenco, ki določa točko v tem diagramu. Takemu diagramu pravimo Nicholsov diagram.

Nicholsov diagram torej predstavlja združitev obeh Bodejevih diagramov v en diagram. Zato ga lahko dobimo iz Bodejevega diagrama z odčitavanjem logaritma absolutne vrednosti in faze pri isti frekvenci.

Glede na ostale frekvenčne diagrame se Nicholsov diagram manj uporablja, nudi pa nekatere prednosti v nekaterih načrtovalnih postopkih (npr. določitev relativne stabilnosti).

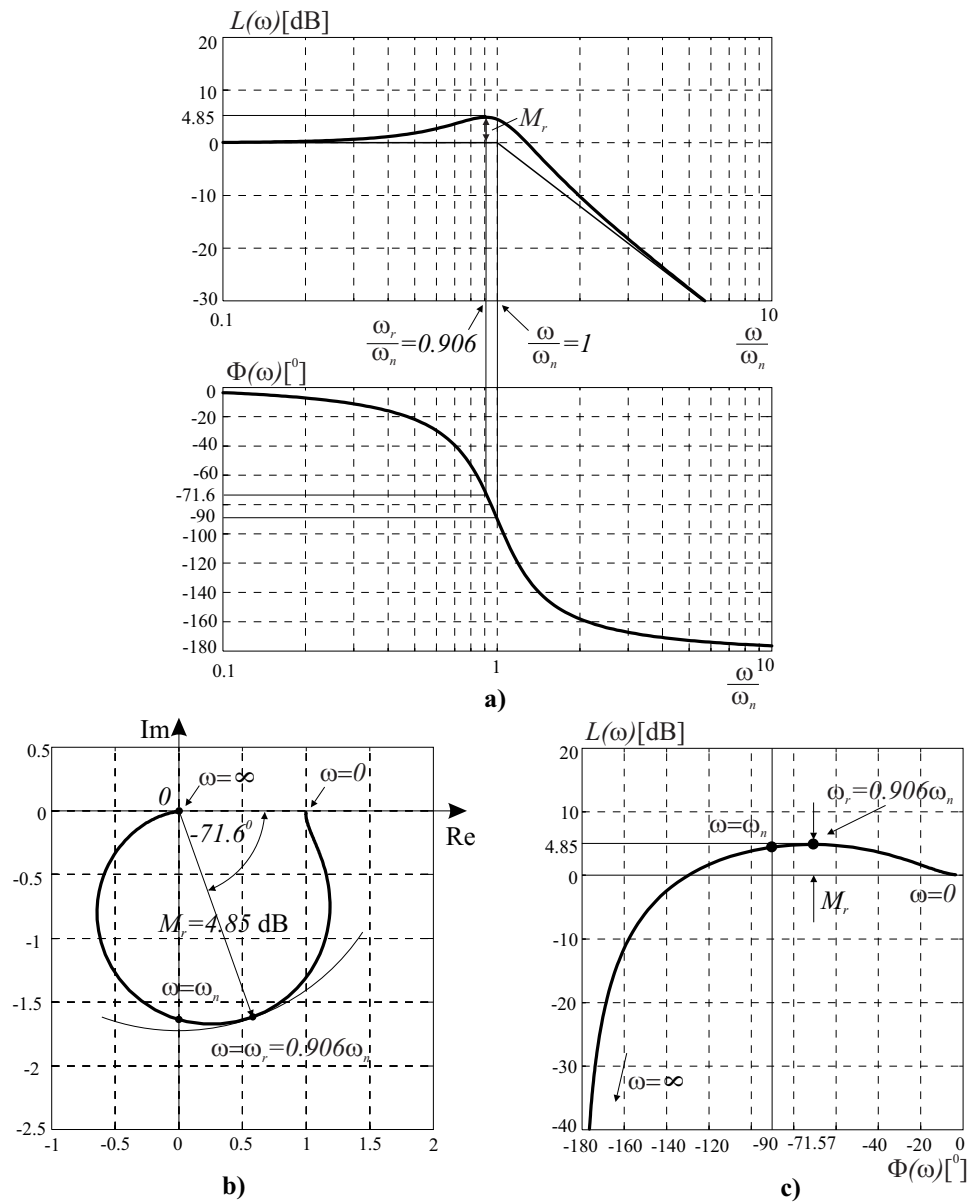
Sprememba ojačenja v frekvenčni karakteristiki  $G(j\omega)$  vpliva v Nicholsovem diagramu tako, da se krivulja premika navzgor oz. navzdol, njena oblika pa se ne menja. Nicholsov diagram frekvenčne karakteristike  $\frac{1}{G(j\omega)}$  je simetričen glede na koordinatno izhodišče Nicholsovemu diagramu prenosne funkcije  $G(j\omega)$ , ker velja

$$\begin{aligned} 20 \log \left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| &= -20 \log |G(j\omega)| \\ \angle \left[ \frac{1}{G(j\omega)} \right] &= -\angle[G(j\omega)] \end{aligned} \quad (2.94)$$

Ker smo si poteke za različne sisteme natančno ogledali v Bodejevem in polarnem diagramu, bomo na tem mestu podali le nekatere primere. Slika 2.36 primerja frekvenčni odziv

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.95)$$

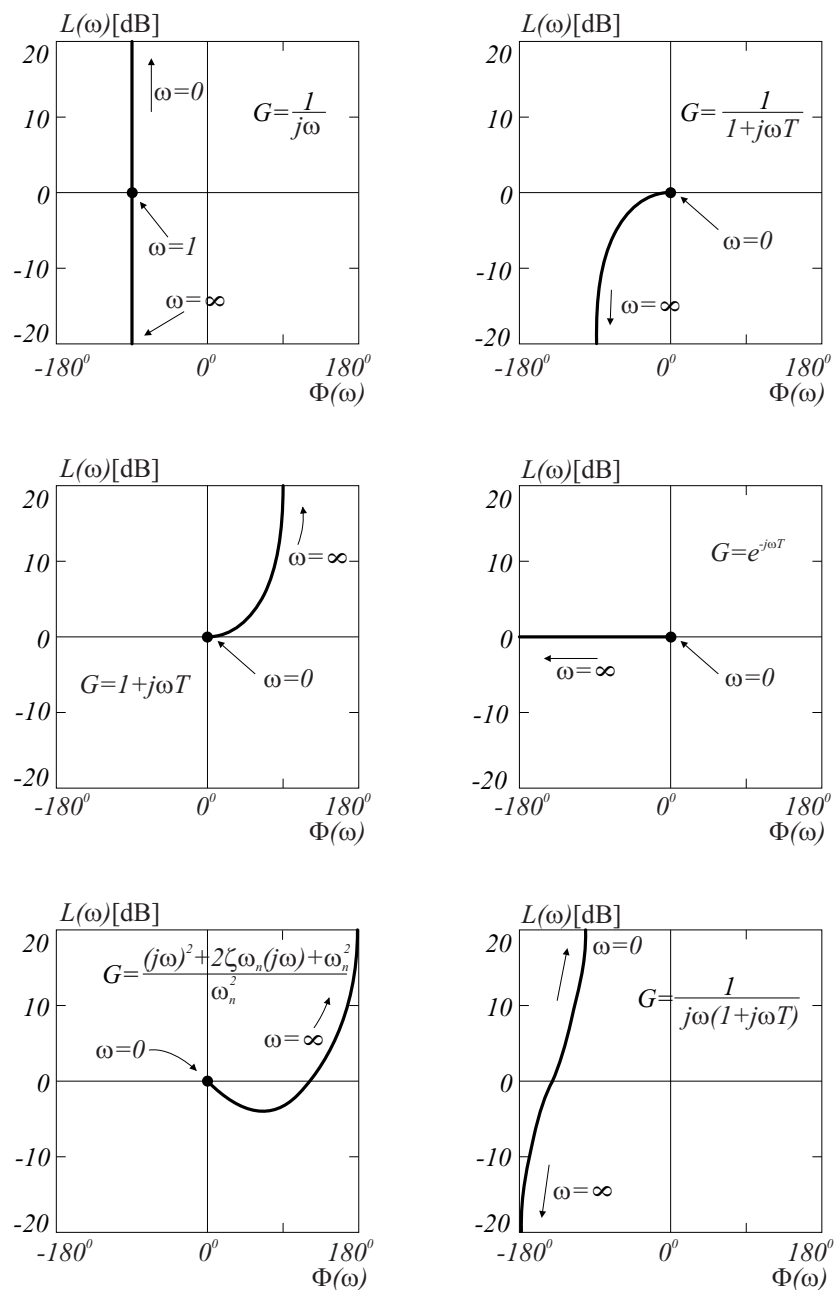
v Bodejevem, polarnem in Nicholsovem diagramu pri dušilnem koeficientu  $\zeta = 0.3$ . V slednjem sta resonančni vrh in resonančna frekvenca določena s točko, kjer ima logaritem absolutne vrednosti maksimum.



Slika 2.36: Frekvenčna karakteristika sistema 2. reda ( $\zeta = 0.3$ ) v različnih frekvenčnih diagramih

- a) Bodejev diagram
- b) polarni diagram
- c) Nicholsov diagram

Slika 2.37 pa prikazuje Nicholsove diagrame nekaterih enostavnejših sistemov.



Slika 2.37: Nicholsovi diagrami enostavnejših sistemov

## 2.5 Stabilnost regulacijskih sistemov

Do sedaj smo omenili dva možna načina za določitev absolutne stabilnosti regulacijskih sistemov

- Poiščemo korene karakteristične enačbe  $1 + G(s)H(s) = 0$ .<sup>1</sup>
- Uporabimo Routhov stabilnostni kriterij.

Vendar pa informacija o tem, ali je sistem stabilen ali ne (absolutna stabilnost) ni najbolj uporabna v raznih načrtovalnih postopkih. Zato potrebujemo metode, ki nam razen informacije o absolutni stabilnosti pokažejo tudi, koliko je sistem "oddaljen" od meje stabilnosti oz. na kakšen način lahko sistemu to "oddaljenost" spremenimo. To pa določa t.i. *relativna stabilnost*. Eno od možnosti za določitev absolutne in relativne stabilnosti daje Nyquistov stabilnostni kriterij.

### 2.5.1 Nyquistov stabilnostni kriterij

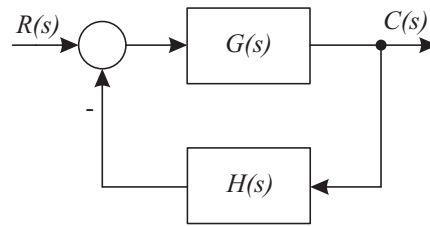
Nyquistov stabilnostni kriterij ima naslednje značilnosti, ki omogočajo uspešno uporabo pri analizi in načrtovanju regulacijskih sistemov:

- Daje enako informacijo o stabilnosti regulacijskih sistemov kot Routhov kriterij.
- Razen absolutne stabilnosti daje informacijo o "oddaljenosti" sistema od meje stabilnosti in omogoča izboljšati stabilnostne lastnosti.
- Kot izhodišče uporablja frekvenčno karakteristiko odprtozančne prenosne funkcije in omogoča določitev zaprtozančne stabilnosti.
- Učinkovito se lahko uporablja za sisteme z mrtvim časom.
- Metodo se lahko modificira za nelinearne sisteme.

Izhodišče za obravnavo predstavlja regulacijski sistem, ki ga prikazuje slika 2.38.

---

<sup>1</sup>Za višje rede uporabimo računalniški program



Slika 2.38: Regulacijski sistem

Karakteristični izraz ima obliko

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{s^j(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (2.96)$$

Preden začnemo z analizo stabilnosti, poudarimo naslednje značilnosti v zvezi s poli in ničlami regulacijskega sistema, ki ga podaja slika 2.38 oz. enačba (2.96).

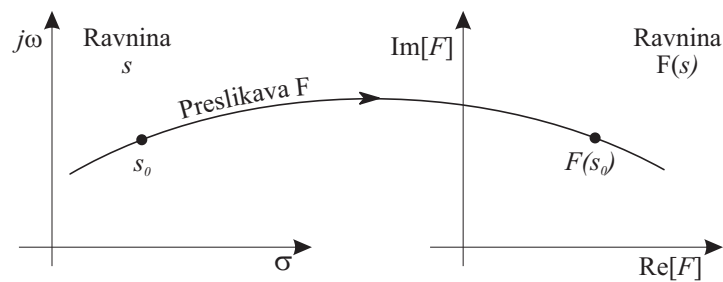
1. Vrste polov in ničel

- ničle odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ ,
- poli odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ ,
- zaprtozančni poli so poli prenosne funkcije  $\frac{C(s)}{R(s)}$  oz. ničle karakterističnega izraza  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  oz. koreni karakteristične enačbe  $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$ .

2. Poli karakterističnega izraza  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  so enaki polom odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ .
3. Za zaprtozančno stabilnost ni nobenih omejitev glede lege polov in ničel odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ . Važno je le, da so poli zaprtozančne prenosne funkcije oz. koreni karakteristične enačbe v levem delu ravnine  $s$ .

Za določitev stabilnosti je potrebno preslikati določene točke iz ravnine  $s$  s pomočjo kompleksne funkcije (preslikave)  $F(s)$  (ali  $G(s)H(s)$ ) v ravnino  $F(s)$  (ali  $G(s)H(s)$ ).

Preslikavo točke  $s_o$  iz ravnine  $s$  v ravnino  $F(s)$  prikazuje slika 2.39.



Slika 2.39: Kompleksna preslikava

**Primer 2.4** Določimo točko v ravnini  $F(s)$ , v katero preslika točko  $s_0 = 2 + j3$  karakteristični izraz  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ . Odprtozančna prenosna funkcija je

$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s+1)(s+3)} \quad (2.97)$$

Karakteristični izraz je

$$F(s) = 1 + \frac{6}{(s+1)(s+3)} \quad (2.98)$$

Kompleksna funkcija  $F(s)$  preslika točko  $s_0 = 2 + j3$  iz ravnine  $s$  v točko

$$F(2 + j3) = 1 + \frac{6}{(3 + j3)(5 + j3)} = 1.0588 - j0.2353 \quad (2.99)$$

□

Polarni diagram, ki smo ga obravnavali kot možno predstavitev frekvenčne karakteristike, predstavlja eno od možnih kompleksnih preslikav, t.j. preslikavo točk, ki se nahajajo na pozitivni imaginarni osi v ravnini  $s$ .

Za razumevanje Nyquistovega stabilnostnega kriterija moramo spoznati nekatere *definicije* v zvezi s kompleksnimi funkcijami, *lastnosti preslikav*, *Nyquistovo krivuljo* in *Nyquistov diagram*.

## Definicije

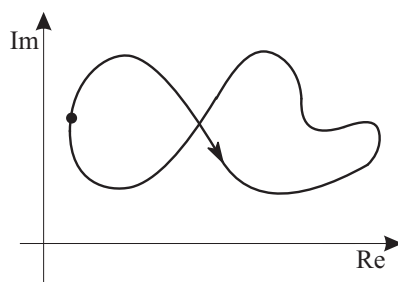
V nadaljnjem bomo v zvezi s kompleksnimi funkcijami oz preslikavami uporabljali naslednje definicije:

1. Kompleksna funkcija  $F(s)$  je *analitična* v nekem področju ravnine  $s$ , če za vsako točko  $s_0$  tega področja velja, da obstaja odvod

$$\left. \frac{dF(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \left[ \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0} \right] \quad (2.100)$$

ki ima končno vrednost. Prenosna funkcija je analitična v vseh točkah ravnine  $s$  razen v polih.

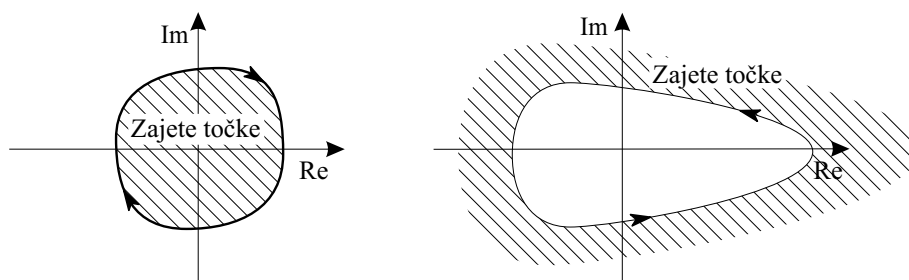
2. Točka, v kateri  $F(s)$  ni analitična, je *singularna točka* ali singularnost kompleksne funkcije  $F(s)$ . Pol je torej singularnost.
3. Neskončno zaporedje dotikajočih točk (v ravnini  $s$  ali ravnini  $F(s)$ ) tvori *krivuljo*.
4. Krivulja v kompleksni ravnini ima *smer*, ki jo označimo s puščico. Smer je določena z zaporedjem točk, ki tvorijo krivuljo (npr. zaporedje izbranih točk v ravnini  $s$  in zaporedje preslikanih točk v ravnini  $F(s)$ ).
5. Krivulja, ki se začne in konča v isti točki kompleksne ravnine, je *zaključena krivulja*. Prikazuje jo slika 2.40.



Slika 2.40: Zaključena krivulja

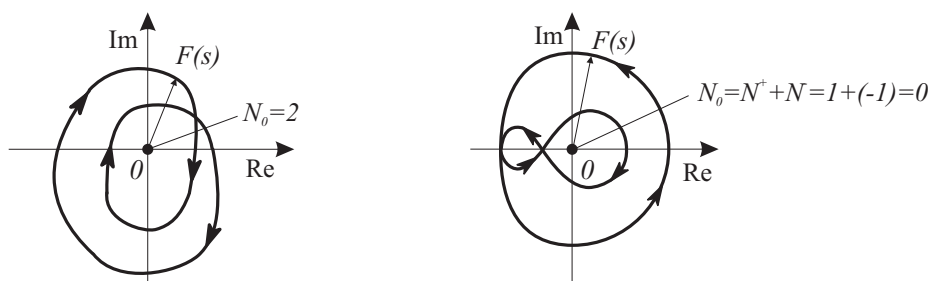
6. Vse točke, ki se nahajajo na desni strani zaključene krivulje, če potujemo v označeni smeri, so *zajete točke*. (slika 2.41).





Slika 2.41: Zajete točke

7. Zaključena krivulja v kompleksni ravnini  $N$ -krat pozitivno obkroži neko točko (npr. koordinatno izhodišče), če radialna linija iz te točke do točke na krivulji rotira v smeri urinega kazalca pri tem za kot  $360^\circ \cdot N$ , pri tem pa točka prepotuje celotno zaključeno krivuljo. Če je pot rotiranja v obratni smeri urinega kazalca, zaključena krivulja negativno obkrožuje koordinatno izhodišče. Celotno število obkrožitev  $N_0$  je število obkrožitev v pozitivni smeri ( $N^+$ ) plus število obkrožitev v negativni smeri ( $N^-$ ) ( $N_0 = N^+ + N^-$ ). Slika 2.42 prikazuje dva primera. V prvem primeru zaključena krivulja 2x obkroži koordinatno izhodišče, v drugem primeru pa nobenkrat.



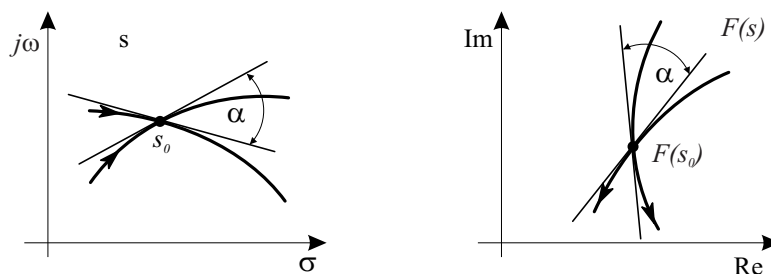
Slika 2.42: Število obkrožitev koordinatnega izhodišča

Število obkrožitev določimo tudi tako, da iz točke, glede na katero proučujemo obkrožitev, potegnemo poltrak v poljubno smer ter določimo vsa presečišča poltraka z zaključeno krivuljo. Če zaključena krivulja seka poltrak v smeri urinega kazalca, potem tako presečišče daje prispevek  $+1$ , sicer  $-1$  v končno vsoto, ki določa število obkrožitev  $N_0$ .

### Lastnosti preslikave kompleksne funkcije $F(s)$

Preslikava s kompleksno funkcijo  $F(s)$  ima naslednje lastnosti:

1.  $F(s)$  je *enolična funkcija*  $s$ . To pomeni, da vsaki točki  $s$  ustreza ena sama točka v ravnini  $F(s)$ . Preslikava iz  $F(s)$  v  $s$  ni enolična.
2.  $F(s)$  je *analitična funkcija* razen v končnem številu singularnih točk v  $s$  ravnini.
3. Vsaka zaključena krivulja v ravnini  $s$  se preslika v *zaključeno krivuljo* v ravnini  $F(s)$ .
4.  $F(s)$  je *konformna preslikava*. To pomeni, da se pri preslikavi ohranja kot (dva odseka, ki se sekata v ravnini  $s$ , se v ravnini  $F(s)$  sekata pod istim kotom) (slika 2.43).



Slika 2.43: Konformnost preslikave

5. Če s kompleksno funkcijo  $F(s)$  preslikamo zaključeno krivuljo v ravnini  $s$ , je celotno število obkrožitev  $N_0$  izhodišča, ki jih naredi krivulja  $F(s)$  (v ravnini  $F(s)$ ) enako številu ničel  $Z_0$  minus številu polov  $P_0$  funkcije  $F(s)$ , ki so zajeti znotraj zaključene krivulje v ravnini  $s$

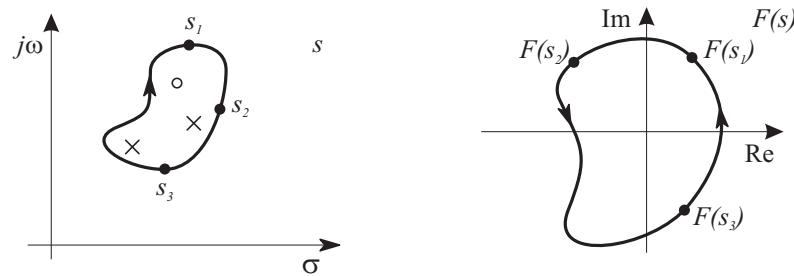
$$N_0 = Z_0 - P_0 \quad (2.101)$$

**Primer 2.5** Neka prenosna funkcija (karakteristični izraz)  $F(s)$  ima eno ničlo v desnem delu ravnine  $s$ . To ničlo obkrožimo z zaključeno krivuljo v ravnini  $s$  in to krivuljo preslikamo v ravnino  $F(s)$ . Ustrezno preslikavo prikazuje slika 2.44.

Koordinatno izhodišče v ravnini  $F(s)$  je enkrat obkroženo v obratni smeri urinega kazalca, zato je število obkrožitev

$$N_0 = -1 \quad (2.102)$$

Ker je  $Z_0 = 1$  (ena vsebovana ničla znotraj sklenjene konture), velja

Slika 2.44: Preslikava  $F(s)$ 

$$P_0 = Z_0 - N_0 = 1 - (-1) = 2 \quad (2.103)$$

Torej ima  $F(s)$  dva pola znotraj zaključene krivulje v ravnini  $s$ . □

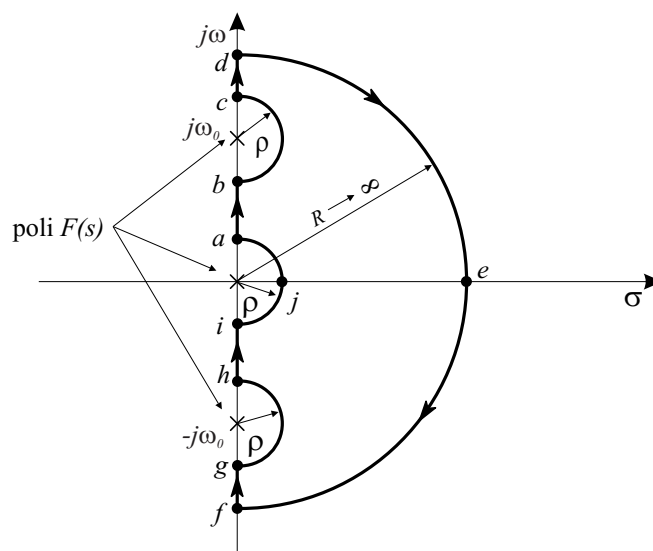
### Nyquistova krivulja

Zaradi lastnosti preslikave  $F(s)$ , da je število obkrožitev koordinatnega izhodišča enako razliki števila ničel in polov, ki jih obkroža zaključena krivulja v ravnini  $s$ , je Nyquist prišel na idejo, da bi za določitev stabilnosti bilo potrebno izbrati tako zaključeno krivuljo v ravnini  $s$ , ki obkroža celotno desno polravnino. V njej namreč ležijo nestabilni poli zaprtozančne prenosne funkcije. To krivuljo imenujemo *Nyquistova krivulja*. Njena smer je določena z naraščajočo frekvenco  $\omega$ .

Nyquistova krivulja ne sme potekati skozi singularnosti (pole) funkcije  $F(s)$ . V primeru, če  $F(s)$  vsebuje pole na imaginarni osi, je potrebno Nyquistovo krivuljo speljati mimo teh točk s pomočjo polkrogov z infinitezimalno majhnim radijem. Slika 2.45 prikazuje Nyquistovo krivuljo v primeru pola v koordinatnem izhodišču in konjugirano kompleksnega para polov na imaginarni osi.

Ker je potrebno, da Nyquistova krivulja obkroža celotno desno polravnino, je radij kroga neskončen ( $R \rightarrow \infty$ ).

Da lahko izvedemo ustrezno preslikavo iz ravnine  $s$ , je potrebno matematično zapisati vse odseke Nyquistove krivulje. Število odsekov zavisi od števila singu-



Slika 2.45: Nyquistova krivulja

lastnosti na imaginarni osi. V našem primeru imamo osem odsekov:

|          |                  |                                                                   |                                       |
|----------|------------------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. odsek | $\overline{ab}$  | : $s = j\omega$                                                   | $0 < \omega < \omega_0$               |
| 2. odsek | $\overline{bc}$  | : $s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j\omega_0 + \rho e^{j\theta})$  | $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ |
| 3. odsek | $\overline{cd}$  | : $s = j\omega$                                                   | $\omega_0 < \omega < \infty$          |
| 4. odsek | $\overline{de}$  | : $s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta}$                 | $90^\circ \geq \theta \geq -90^\circ$ |
| 5. odsek | $\overline{fg}$  | : $s = j\omega$                                                   | $-\infty < \omega < -\omega_0$        |
| 6. odsek | $\overline{gh}$  | : $s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (-j\omega_0 + \rho e^{j\theta})$ | $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ |
| 7. odsek | $\overline{hi}$  | : $s = j\omega$                                                   | $-\omega_0 < \omega < 0$              |
| 8. odsek | $\overline{ija}$ | : $s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}$                | $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ |

(2.104)

### Nyquistov diagram

Potem, ko definiramo Nyquistovo krivuljo, določimo stabilnost povratnozančnega sistema tako, da le to preslikamo s pomočjo preslikave  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  v ravnino  $F(s)$ . Krivulja, ki jo dobimo, se imenuje *Nyquistov diagram* prenosne funkcije  $F(s)$ . Analiza stabilnosti poteka tako, da določimo število obkrožitev koordinatnega izhodišča v ravnini  $F(s)$ . Toda ker imamo običajno podano odprtozančno prenosno funkcijo  $G(s)H(s)$ , ne pa karakteristični izraz  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ , lahko določimo stabilnostne lastnosti tako, da narišemo Nyquistov diagram odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ , vendar moramo v tem

primeru upoštevati število obkrožitev točke  $-1 + j0$ . Izhodišče v ravnini  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  namreč ustreza točki  $-1 + j0$  v ravnini  $G(s)H(s)$ .

Hkrati pa lahko s pomočjo Nyquistovega diagrama prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  sklepamo tudi na stabilnost odprtozančnega sistema  $G(s)H(s)$  preko obkrožitvenega kriterija koordinatnega izhodišča.

Koordinatno izhodišče in točko  $-1 + j0$  (odvisno od vrste analize) imenujemo *kritični točki*.

Analiziramo torej stabilnost odprtozančnega in stabilnost zaprtozančnega sistema. *Odprtozančna stabilnost zahteva, da so vsi poli prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  v levi polravnini, zaprtozančna stabilnost pa zahteva, da so vse ničle prenosne funkcije  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  v levi polravnini.*

Za opis postopka risanja Nyquistovega diagrama prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  uporabimo Nyquistovo krivuljo, ki jo prikazuje slika 2.45. Postopek preslikave lahko naredimo v naslednjih korakih:

1. korak: Preverimo, ali ima  $G(s)H(s)$  pole na imaginarni osi in v koordinatnem izhodišču.
2. korak: S pomočjo enačb za posamezne odseke (enačbe (2.104)) v ravnini  $s$  preslikamo odseke  $\overline{ab}$ ,  $\overline{cd}$  in  $\overline{bc}$  v  $G(s)H(s)$  ravnino. Če ni polov na imaginarni osi, se postopek precej poenostavi. Potrebno je le narisati polarni diagram funkcije  $G(s)H(s)$ .<sup>2</sup>
3. korak: Odseke  $\overline{hi}$ ,  $\overline{fg}$  in  $\overline{gh}$  preslikamo tako, da narišemo glede na realno os zrcalno sliko krivulje, ki smo jo dobili v 2. koraku.
4. korak: Uporabimo enačbo za preslikavo poti  $\overline{def}$ . Ta polkrog z neskončnim radijem se običajno preslika v točko v ravnini  $G(s)H(s)$ .
5. korak: Če ima prenosna funkcija  $G(s)H(s)$  pole v koordinatnem izhodišču ravnine  $s$ , uporabimo enačbo za preslikavo odseka  $\overline{ija}$ .
6. korak: Povežemo vse tako dobljene krivulje. Pri tem upoštevamo, da je preslikava zaključene krivulje zaključena krivulja. Pomaga nam tudi lastnost ohranjanja kotov (konformnost preslikave), posebno za preslikavo točk, kjer se polkrogi stikajo z ostalimi odseki Nyquistove krivulje.

---

<sup>2</sup>Polarni diagram je preslikava pozitivne imaginarne osi iz ravnine  $s$  v ravnino  $G(s)H(s)$

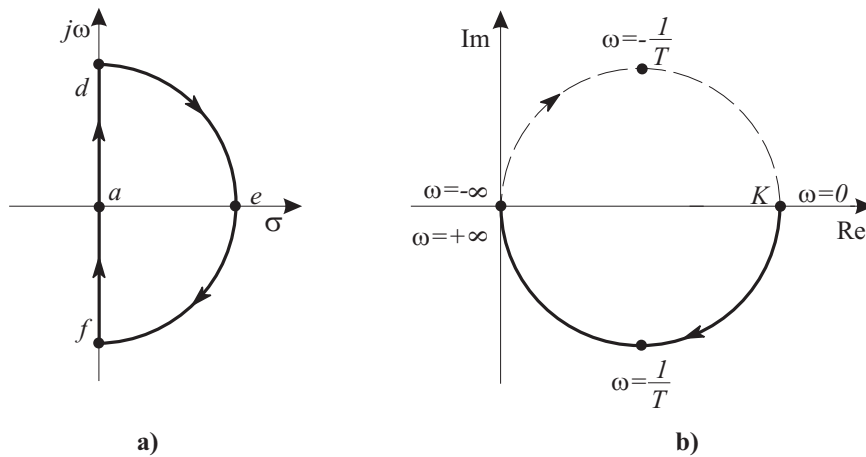
**Primer 2.6** Proporcionalni sistem (0. vrste) ima prenosno funkcijo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (2.105)$$

Ker prenosna funkcija ne vsebuje polov na imaginarni osi, izberemo Nyquistovo krivuljo, kot jo prikazuje slika 2.46a. Nyquistov diagram pa dobimo tako, da narišemo polarni diagram (slika 2.24) in njegovo zrcalno sliko (za negativne frekvence). Polkrog  $\overline{def}$  se namreč preslika v koordinatno izhodišče.

$$G(s)H(s) \Big/_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta}} = \frac{K}{T \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta} + 1} = 0 \quad (2.106)$$

Nyquistov diagram prikazuje slika 2.46b.



Slika 2.46: a) Nyquistova krivulja  
b) Nyquistov diagram

□

**Primer 2.7** Sistem prve vrste ima prenosno funkcijo

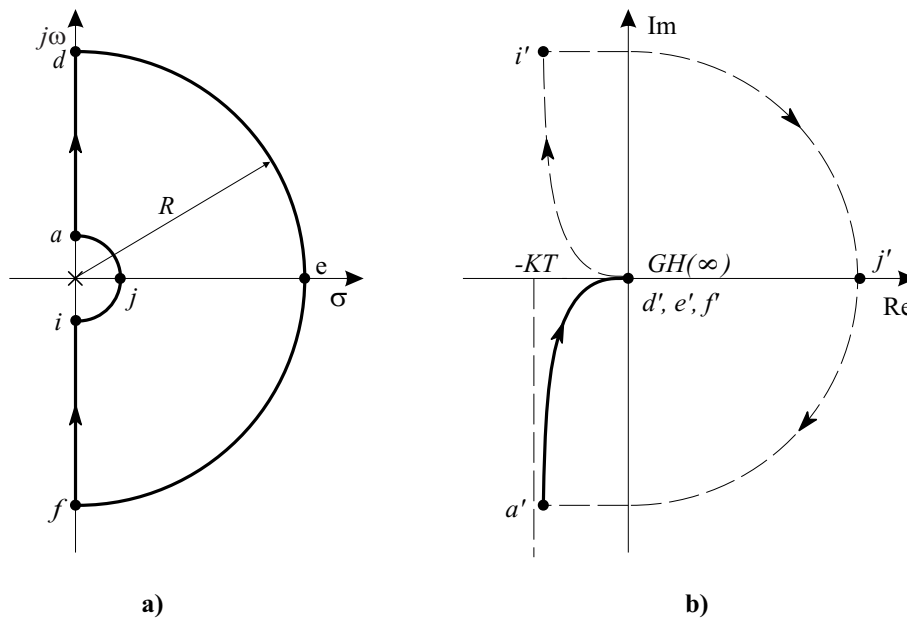
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (2.107)$$

Ker ima sistem pol v koordinatnem izhodišču, ga obkrožimo s polkrogom  $s = \rho e^{j\theta}$  ( $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ). Ustrezno Nyquistovo krivuljo prikazuje slika 2.47a.

Nyquistov diagram dobimo tako, da narišemo polarni diagram (slika 2.29 za  $K = 1$ ) in njegovo zrcalno sliko. Preslikati pa je potrebno še polkrog  $\overline{ija}$  okoli singularnosti.

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big/_{s=\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho e^{j\theta} (T \rho e^{j\theta} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho e^{j\theta}} = \infty e^{-j\theta} \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \end{aligned} \quad (2.108)$$

Torej se polkrog  $\overline{ija}$  preslika v polkrog z neskončnim radijem, ki se začne s kotom  $-\theta = 90^\circ$  in konča s kotom  $-\theta = -90^\circ$ . Nyquistov diagram prikazuje slika 2.47b.



Slika 2.47: a) Nyquistova krivulja  
b) Nyquistov diagram

Pri risanju Nyquistove krivulje si lahko pomagamo tudi s konformnostjo preslikave. Nyquistova krivulja naredi v točki  $i$  obrat za  $90^\circ$  v desno. Zato tudi točka  $i'$

v Nyquistovem diagramu naredi obrat za  $90^0$  v desno. Enako velja tudi za točko  $a$ . □

**Primer 2.8** Sistem  $l$ -te vrste ima prenosno funkcijo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^l(Ts + 1)} \quad (2.109)$$

Nyquistova krivulja je enaka kot pri sistemu 1. vrste (slika 2.47a). Vendar je v tem primeru preslikava infinitezimalnega polkroga v koordinatnem izhodišču podana z izrazom

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big/_{s=\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^l e^{jl\theta} (T\rho e^{j\theta} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^l e^{jl\theta}} = \infty e^{-jl\theta} \quad -90^0 \leq \theta \leq 90^0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

Ko  $\theta$  opiše v ravnini  $s$  kot od  $-90^0$  do  $+90^0$ , opiše polkrog z neskončnim radijem v ravnini  $G(s)H(s)$  kot od  $l \cdot 90^0$  do  $-l \cdot 90^0$ , torej  $l \cdot 180^0$ . Nyquistov diagram za  $l = 3$  (polarni diagram pri nizkih frekvencah določa faza  $-270^0$ , pri visokih pa  $-360^0$ ) prikazuje slika 2.48.

□

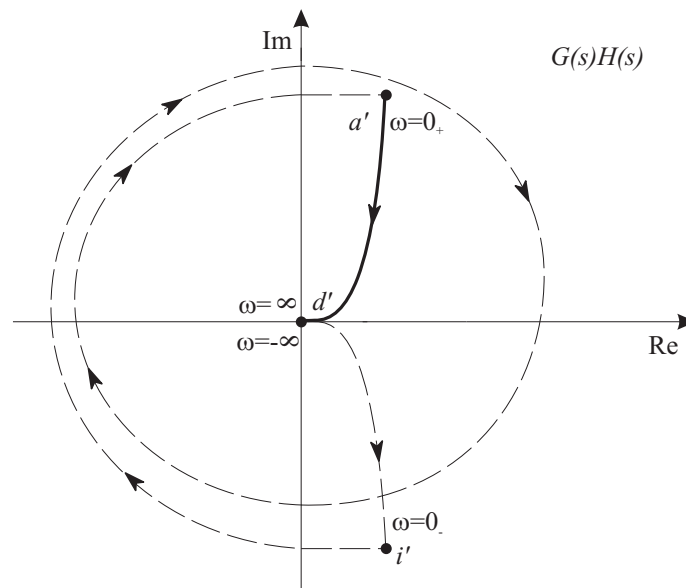
## Analiza stabilnosti

Izhodišče za analizo stabilnosti s pomočjo Nyquistovega kriterija je lastnost 5 kompleksne preslikave  $F(s)$  (enačba 2.101).

Definirajmo zaporedje  $N_0$ ,  $Z_0$  in  $P_0$  ter zaporedje  $N_{-1}$ ,  $Z_{-1}$  in  $P_{-1}$ :

$N_0$  ... število obkrožitev koordinatnega izhodišča, ki jih naredi Nyquistov diagram prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ ,





Slika 2.48: Nyquistov diagram sistema tretje vrste

- $Z_0$  ... število ničel  $G(s)H(s)$ , ki so v ravnini  $s$  obkrožene z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini,
- $P_0$  ... število polov  $G(s)H(s)$ , ki so v ravnini  $s$  obkrožene z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini,
- $N_{-1}$  ... število obkrožitev točke  $-1 + j0$ , ki jih naredi Nyquistov diagram prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ ,
- $Z_{-1}$  ... število ničel  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ , ki so obkrožene v ravnini  $s$  z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini,
- $P_{-1}$  ... število polov  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ , ki so obkroženi v ravnini  $s$  z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini.

Poli prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  so identični polom  $1 + G(s)H(s)$ , zato velja za pole, ki ležijo v desnem delu ravnine  $s$

$$P_0 = P_{-1} \quad (2.111)$$

*Za stabilnost zaprtozančnega sistema se zahteva, da je število ničel  $1 + G(s)H(s)$  v desni polravnini enako nič.*

$$Z_{-1} = 0 \quad (2.112)$$

*Odprtozančni sistem  $G(s)H(s)$  pa je stabilen, če je število polov v desni polravnini enako nič.*

$$P_0 = 0 \quad (2.113)$$

Pri nadaljnjem izvajanju ne pozabimo na bistvo: zaprtozančno stabilnost določimo iz Nyquistovega diagrama odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ .

Analizo stabilnosti s pomočjo Nyquistovega kriterija lahko opišemo z naslednjimi točkami:

1. Narišemo Nyquistovo krivuljo in Nyquistov diagram prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ .
2. Določimo  $N_0$  (število obkrožitev izhodišča) in  $N_{-1}$  (število obkrožitev točke  $-1 + j0$ ) iz Nyquistovega diagrama.
3. Ko določimo  $N_0$  in  $N_{-1}$ , določimo število polov odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  v desni polravnini iz enačbe

$$N_0 = Z_0 - P_0 \quad \rightarrow P_0 \quad (2.114)$$

če je le podano število ničel  $Z_0$  (število ničel je v splošnem manjše in je običajno znano). Če je  $P_0$  znan, lahko ta korak opustimo. Ko je znan  $P_0$ , je znan tudi  $P_{-1}$ , saj velja  $P_{-1} = P_0$ . Nato določimo število ničel karakterističnega izraza  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ , ki ležijo v desni polravnini, iz enačbe

$$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1} \quad \rightarrow Z_{-1} \quad (2.115)$$

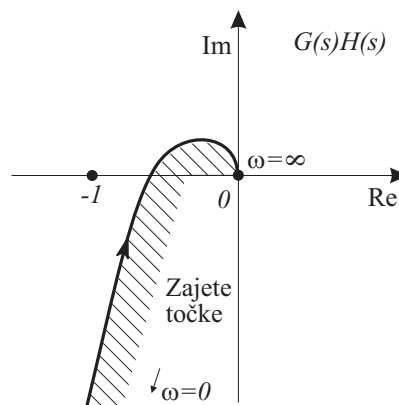
*Sistem je stabilen, če je število ničel  $Z_{-1} = 0$ . Zato je pogoj za ugotavljanje stabilnosti s pomočjo Nyquistovega kriterija podan z enačbo*

$$N_{-1} = -P_{-1} = -P_0 \leq 0 \quad (2.116)$$

S pomočjo enačbe (2.116) lahko navedemo tri različne možnosti glede na to, ali je število obkrožitev točke  $-1 + j0$  nič, negativno ali pozitivno:

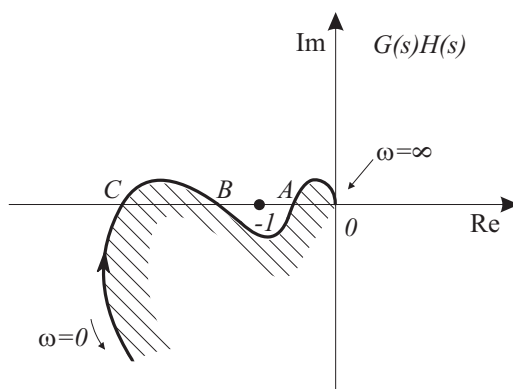
1.  $N_{-1} = 0$  Točka  $-1 + j0$  ni obkrožena. V tem primeru je sistem stabilen, če  $G(s)H(s)$  nima polov v desni polravnini ( $P_0 = 0$ ), v obratnem primeru pa je nestabilen.
2.  $N_{-1} < 0$  Točka  $-1 + j0$  je enkrat ali večkrat obkrožena v obratni smeri urinega kazalca. V tem primeru je sistem stabilen, če je število obkrožitev v obratni smeri urinega kazalca enako številu polov odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  v desni strani ravnine  $s$  ( $|N_{-1}| = P_0$ ) (enačba 2.116).
3.  $N_{-1} > 0$  Točka  $-1 + j0$  je enkrat ali večkrat obkrožena v smeri urinega kazalca. V tem primeru je sistem vedno nestabilen.

Striktne analize stabilnosti s pomočjo Nyquistovega diagrama zahteva torej določitev števila obkrožitev točke  $-1 + j0$ . Če pa funkcija  $G(s)H(s)$  nima polov v desni polravnini, potem lahko kriterij poenostavimo: *sistem je stabilen, če Nyquistov diagram ne zajema točke  $-1 + j0$* . Običajno je v tem primeru dovolj, če narišemo polarni diagram. Vendar s to analizo ne dobimo informacije o številu nestabilnih polov zaprtozančnega sistema. Slika 2.49 prikazuje polarni diagram sistema, katerega prenosna funkcija  $G(s)H(s)$  ne vsebuje nestabilnih polov. Ker točka  $-1 + j0$  ni zajeta, je sistem stabilen.



Slika 2.49: Polarni diagram

Pogojno stabilni sistem



Slika 2.50: Polarni diagram pogojno stabilnega sistema

Slika 2.50 prikazuje polarni diagram sistema  $G(s)H(s)$ , za katerega je značilno, da je stabilen le v nekem območju ojačenja  $K$ .

Če predpostavimo, da sistem nima odprtozančnih nestabilnih polov, potem za razmere, ki jih prikazuje slika 2.50, kritična točka  $-1 + j0$  ni zajeta z Nyquistovim diagramom in sistem je stabilen. Za stabilno delovanje mora biti točka  $-1 + j0$  med točko A in točko B. Če se ojačenje zadosti poveča ali zadosti zmanjša, postane sistem nestabilen. Zato takemu sistemu pravimo *pogojno stabilni sistem*.

**Primer 2.9** Odprtozančna prenosna funkcija je

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(\frac{1}{2}s+1)} \quad (2.117)$$

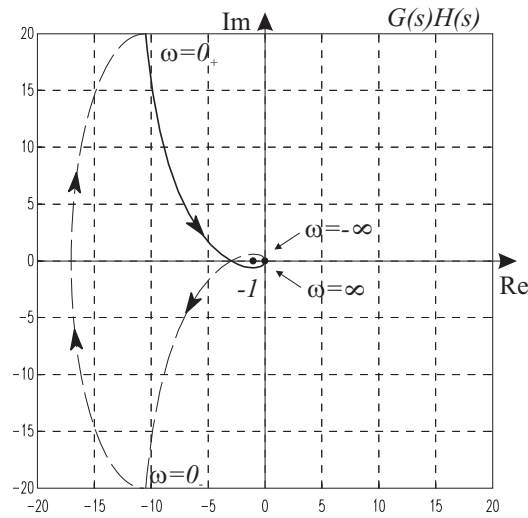
Slika 2.51 prikazuje Nyquistova diagrama pri  $K = 0.5$  in  $K = 5$ .

Število polov znotraj Nyquistove krivulje odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  in  $F(s)$  je  $P_0 = P_{-1} = 0$ . Zato je pogoj za stabilnost zaprtozančnega sistema

$$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1} = 0 - 0 = 0 \quad (2.118)$$

Pri majhnem  $K$  (slika 2.51a) Nyquistova krivulja ne obkroža točke  $-1 + j0$  (točka ni zajeta), torej je sistem stabilen. Pri velikem  $K$  (slika 2.51b) pa velja





Slika 2.52: Nyquistov diagram

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0+} \frac{K(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{3K}{-j\omega} = \infty e^{j(90^\circ)} \quad (2.121)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{Kj\omega}{-\omega^2} = 0 e^{j(-90^\circ)} \quad (2.122)$$

Preslikave polkroga  $s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}$ ;  $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$  iz Nyquistove krivulje:

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}} = \frac{3K}{-\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}} = -\infty e^{-j\theta} = \infty e^{-j(\theta+180^\circ)} = \infty e^{j\psi} \quad (2.123)$$

$$\theta = -90^\circ \quad \psi = -90^\circ \quad (2.124)$$

$$\theta = -89^\circ \quad \psi = -91^\circ \quad (2.125)$$

$$\theta = +90^\circ \quad \psi = -270^\circ \quad (2.126)$$

Odpertožančna prenosna funkcija ima en pol ( $s = 1$ ) v desni polravnini, torej velja  $P_0 = P_{-1} = 1$ . Odpertožančni sistem je nestabilen. Nyquistov diagram kaže, da je kritična točka  $-1 + j0$  enkrat obkrožena v obratni smeri urinega kazalca

$$N_{-1} = -1 \quad (2.127)$$

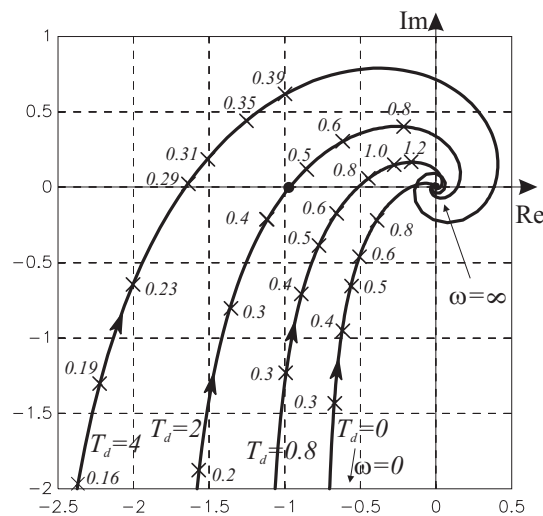
Ker velja  $N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1}$ , je  $Z_{-1} = 0$ , kar pomeni, da je zaprtozančni sistem stabilen, kljub temu, da je odprtozančni sistem nestabilen.

□

**Primer 2.11** Odprtozančna prenosna funkcija vsebuje mrtvi čas

$$G(s)H(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s(s+1)(s+2)} \quad (2.128)$$

Polarne diagrame za različne mrtve čase prikazuje slika 2.53.



Slika 2.53: Polarni diagrami sistema z mrtvim časom

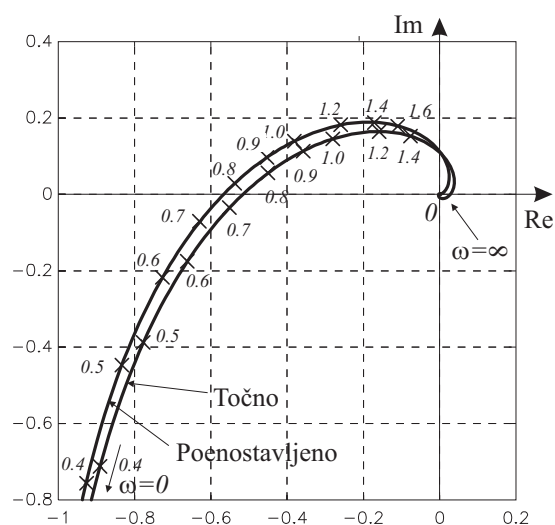
Ker odprtozančni sistem nima nestabilnih polov, zadošča za analizo stabilnosti polarni diagram. Opazimo, da polarni diagram zajame kritično točko  $-1 + j0$  pri  $T_d > 2$ . Torej je sistem stabilen, če je mrtvi čas  $T_d < 2$ . To je ponoven dokaz, da mrtvi čas neugodno deluje na stabilnost regulacijske zanke.

Natančno risanje polarnega diagrama sistema z mrtvim časom zahteva računalniški program. Lahko pa si pomagamo tudi s prenosi vrednosti iz Bodejevega diagrama,

ki je bolj primeren za sisteme z mrtvim časom, ali pa z razvojem mrtvega časa v vrsto

$$e^{-T_d s} \doteq 1 - T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2!} - \frac{T_d^3 s^3}{3!} + \dots \quad (2.129)$$

Slika 2.54 prikazuje točen in poenostavljen polarni diagram ob upoštevanju dveh členov vrste pri  $T_d = 0.8$  sek.



Slika 2.54: Točen in poenostavljen polarni diagram

Poenostavljena prenosna funkcija je

$$G(s)H(s) \doteq \frac{1 - T_d s}{s(s+1)(s+2)} \quad (2.130)$$

Ker ima ničlo v desni polravnini, je njen fazni prispevek pri  $\omega \rightarrow \infty$  enak  $-90^\circ$ , zato je fazni kot pri  $\omega \rightarrow \infty$  enak  $-360^\circ = 0^\circ$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)H(j\omega) \doteq \frac{-T_d j\omega}{j\omega \cdot j\omega \cdot j\omega} = \frac{T_d}{\omega^2} = 0e^{j0^\circ} \quad (2.131)$$

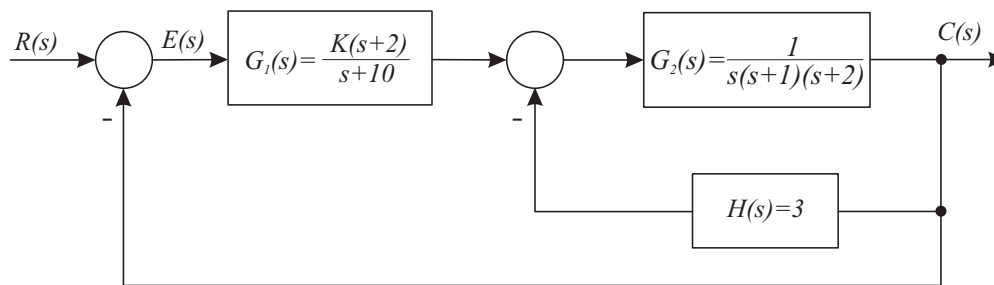
□



### Stabilnost večzančnega sistema

Večzančni regulacijski sistem je z uporabo bločne algebre sicer možno poenostaviti v osnovno povratnozančno strukturo in potem za analizo stabilnosti uporabiti opisani postopek. Vendar pa je problem v tem, da iz zapisa običajno niso direktno razvidni poli in/ali ničle odprtozančne prenosne funkcije. Nyquistov stabilnostni kriterij omogoča sistematičen pristop k analizi stabilnosti takega sistema.

**Primer 2.12** Večzančni regulacijski sistem prikazuje slika 2.55.



Slika 2.55: Večzančni regulacijski sistem

S pomočjo Nyquistovega kriterija najprej analiziramo notranjo zanko z odprtozančno prenosno funkcijo

$$G_2(s)H(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+2)} \quad (2.132)$$

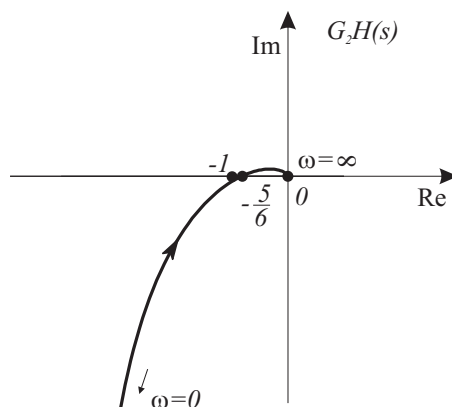
Ustrezen polarni diagram prikazuje slika 2.56.

Ker točka  $-1 + j0$  ni zajeta, je notranja zanka stabilna. Ker je tudi prenosna funkcija  $G_1(s)$  stabilna, je odprtozančna prenosna funkcija  $\frac{C(s)}{E(s)}$  stabilna ( $P_0 = 0$ ).

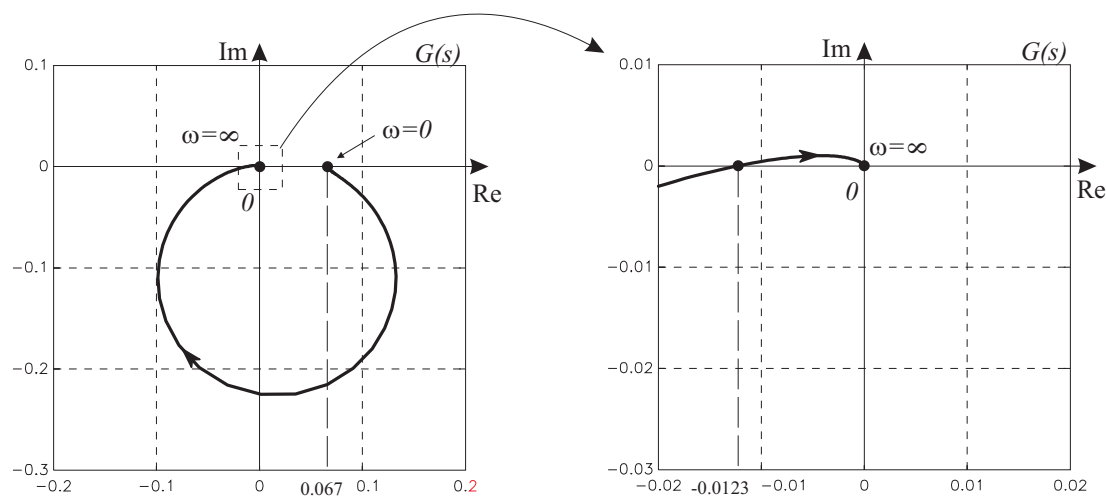
Nato narišemo Nyquistov diagram odprtozančne prenosne funkcije  $G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$  pri  $K = 1$ . Ker smo ugotovili, da je le ta stabilna, lahko tudi za analizo zunanje zanke uporabimo pravilo zajetih točk. Polarni diagram prikazuje slika 2.57.

Točka  $-1 + j0$  je zajeta, če velja

$$-0.0123K < -1 \quad \text{oz.} \quad K > 81.3 \quad (2.133)$$



Slika 2.56: Polarni diagram notranje zanke

Slika 2.57: Polarni diagram večzankačnega sistema ( $K = 1$ )

V takem primeru je sistem nestabilen. Stabilnost pa dosežemo s  $0 \leq K < 81.3$ .

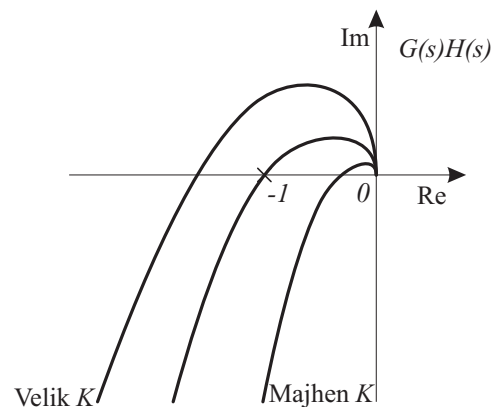
□

## 2.5.2 Relativna stabilnost

Pri načrtovanju regulacijskega sistema je osnovna zahteva, da je zaprtozanka sistem stabilen. Vendar pa potrebujemo tudi merilo o tem, koliko je stabilen ali nestabilen sistem oddaljen od meje stabilnosti. Ta podatek nam definira *relativno*

*stabilnost sistema.* Le-ta je podana s *faznim* in *ojačevalnim razločkom*.

Slika 2.58 prikazuje polarni diagram sistema 1. vrste za tri različne vrednosti ojačenja odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ . Za majhne vrednosti ojačenja  $K$  je zaprtozančni sistem stabilen, za velike vrednosti  $K$  pa nestabilen. Polarni diagram, ki gre skozi točko  $-1 + j0$ , predstavlja mejno stabilen primer. Odziv takega sistema ima nihanja konstantne amplitude.



Slika 2.58: Polarni diagram sistema 1. vrste

Na stabilnostne razmere pa v zanki ne vplivamo le z ojačenjem  $K$ . Lahko vplivamo npr. tudi s spreminjanjem mrtvega časa ( $e^{-sT_m}$ ), ki vpliva le na spremembo faznega kota ( $\angle[e^{-j\omega T_m}] = -\omega T_m$ ), glej sliko 2.53).

Čim bliže gre polarni diagram mimo točke  $-1 + j0$ , bolj nihajoči so signali v regulacijskem sistemu. Zato je relativna stabilnost določena z oddaljenostjo polarnega diagrama od točke  $-1 + j0$ . To oddaljenost definiramo s faznim razločkom (angl. phase margin) in ojačevalnim razločkom (angl. gain margin).

### Fazni razloček

Pozitivni fazni razloček predstavlja tisti pozitivni fazni kot (fazno zaostajanje), ki ga je potrebno dodati v regulacijsko zanko, da stabilni sistem postane mejno stabilen (npr. povečamo mrtvi čas v zanki). Negativni fazni razloček pa predstavlja tisti negativni fazni kot (fazno prehitevanje), ki ga je potrebno dodati v regulacijsko zanko, da nestabilen sistem postane mejno stabilen (npr. zmanjšamo mrtvi čas).

Za določitev faznega razločka moramo določiti fazni kot  $\Phi(\omega_1) = \angle[G(j\omega_1)H(j\omega_1)]$ , kjer je  $\omega_1$  frekvenca, pri kateri je absolutna vrednost frekvenčne karakteristike enaka 1 ( $|G(j\omega_1)H(j\omega_1)| = 1$  ali  $20 \log |G(j\omega_1)H(j\omega_1)| = 0$  dB). Fazni razloček ( $\Phi_m$ ) določa izraz

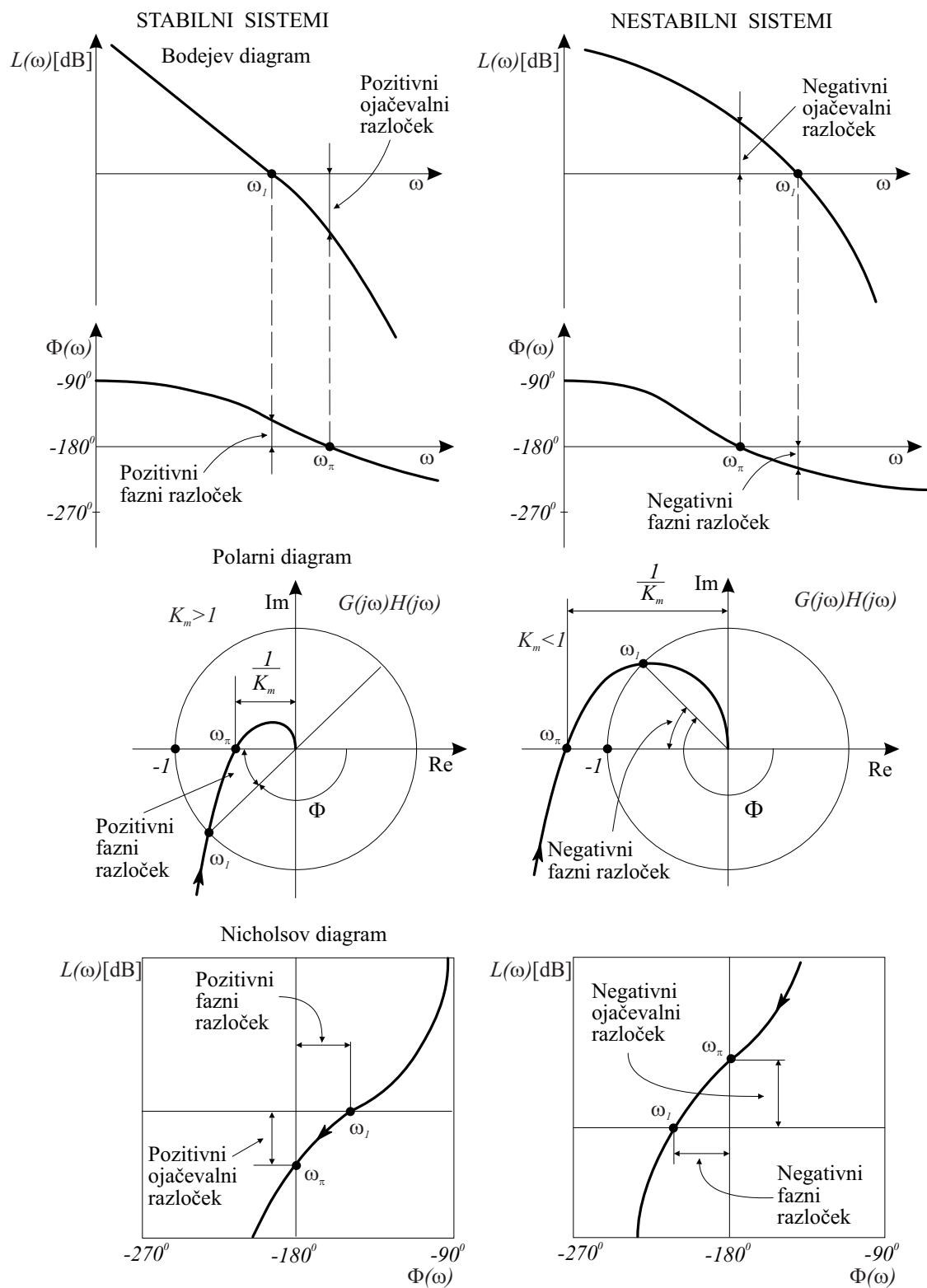
$$\Phi_m = 180^\circ + \Phi(\omega_1) \quad (2.134)$$

Če je  $\Phi(\omega_1) > -180^\circ$ , je  $\Phi_m > 0$  in sistem je stabilen. Če je  $\Phi(\omega_1) = -180^\circ$ , je  $\Phi_m = 0$  in zaprtozančni sistem je mejno stabilen. Če pa je  $\Phi(\omega_1) < -180^\circ$ , pa je  $\Phi_m < 0$  in sistem je nestabilen. Stabilen sistem ima torej pozitivni fazni razloček.<sup>3</sup>

Slika 2.59 prikazuje fazni razloček stabilnega in nestabilnega sistema v Bodejevem, polarnem in Nicholsovem diagramu. V polarnem diagramu dobimo frekvenco  $\omega_1$  s presečiščem polarnega diagrama in enotinega kroga, v Bodejevem in Nicholsovem diagramu pa s presečiščem karakteristike (v Bodeju absolutne vrednosti) z linijo 0 dB.

---

<sup>3</sup>Velja le za sisteme z minimalno fazo



Slika 2.59: Ojačevalni in fazni razloček

### Ojačevalni razloček

Ojačevalni razloček določa, za koliko moramo spremeniti ojačenje odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ , da zaprtozančni sistem postane mejno stabilen. V zvezi s polarnim diagramom izrazimo  $K_m$  v linearnem merilu, v zvezi z Bodejevim in Nicholsovim diagramom pa v dB.  $K_m > 1$  (ali  $K_m[\text{dB}] > 0$  dB) pomeni, da je potrebno ojačenje v zanki povečati, da postane sistem mejno stabilen, torej je tak sistem stabilen.  $K_m < 1$  (ali  $K_m[\text{dB}] < 0$  dB) pa pomeni, da je sistem nestabilen, saj je potrebno njegovo ojačenje zmanjšati, da ga stabiliziramo.

Za določitev ojačevalnega razločka moramo določiti  $|GH(j\omega_\pi)|$ , kjer je  $\omega_\pi$  frekvenca, pri kateri fazni kot doseže  $-180^\circ$  ( $\Phi(\omega_\pi) = -180^\circ$ ). Ojačevalni razloček ( $K_m$ ) je

$$K_m = \frac{1}{|GH(j\omega_\pi)|} \quad (2.135)$$

oz. v dB

$$K_m[\text{dB}] = -20 \log |GH(j\omega_\pi)| \quad (2.136)$$

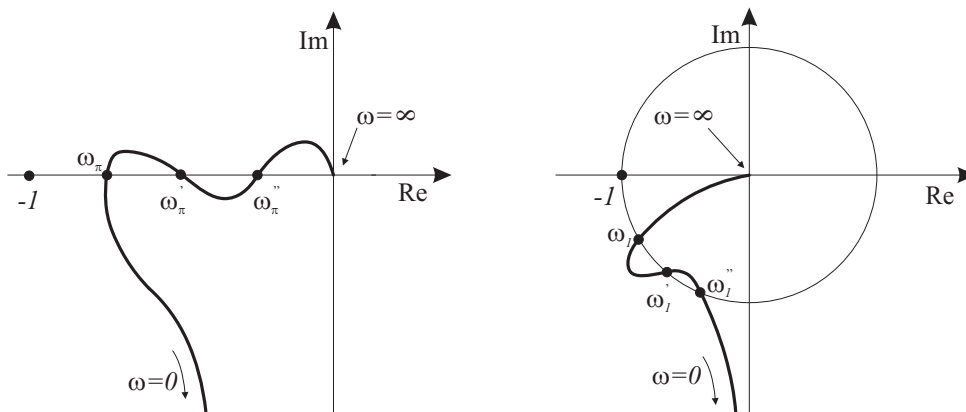
Ojačevalni razloček proporcionalnega sistema (0. vrste) 1. ali 2. reda je neskončen, ker polarni diagram ne seka negativne realne osi. Torej sistema 1. in 2. reda ne moreta postati nestabilna, kar vemo tudi iz analize s pomočjo DLK. Vendar pa sistem 1. ali 2. reda običajno predstavlja le boljši ali slabši model realnega procesa, ki verjetno vsebuje še tudi dodatne manjše časovne konstante. Zato pride lahko pri dovolj velikem ojačenju pri realnem procesu do nestabilnosti.

Slika 2.59 prikazuje ojačevalne razločke za stabilen in nestabilen sistem v Bodejevem, polarnem in Nicholsovem diagramu.

Zaključek, da sta pri stabilnem povratnozančnem sistemu fazni in ojačevalni razloček pozitivna, velja le, če ima odprtozančna prenosna funkcija minimalno fazo.

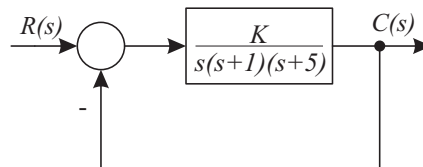
Pri pogojno stabilnih sistemih je več frekvenc, kjer je fazni kot enak  $-180^\circ$ . Sistemi s kompleksno dinamiko v števcu pa imajo lahko pri različnih frekvencah absolutno vrednost frekvenčne karakteristike enako 1. Ustrezne razmere prikazuje slika 2.60. Za določitev razločkov je treba upoštevati tiste točke, ki so najbližje kritični točki  $-1 + j0$  (točki pri frekvencah  $\omega_\pi$  in  $\omega_1$ ).

Ojačevalni in fazni razloček predstavljata ponavadi osnovna kriterija pri načrtovanju

Slika 2.60: Sistemi, ki imajo več frekvenc  $\omega_\pi$  in  $\omega_1$ 

regulacijskih sistemov s frekvenčnimi metodami. Z regulatorjem ali kompenzatorjem želimo običajno doseči fazni razloček med  $30^\circ$  in  $60^\circ$  ter ojačevalni razloček približno 6 dB. S tema vrednostima imamo zagotovljeno stabilnost tudi pri morebitnih manjših spremembah parametrov v regulacijski zanki.

**Primer 2.13** Določimo fazni in ojačevalni razloček sistema, ki ga prikazuje slika 2.61, za  $K = 10$  in  $K = 100$ .



Slika 2.61: Regulacijski sistem

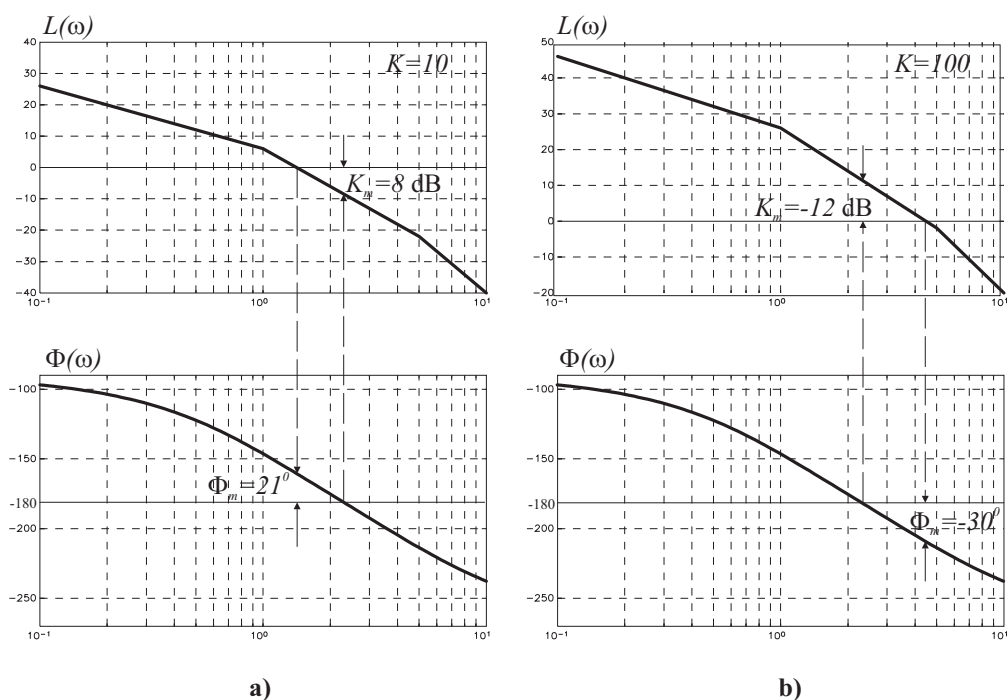
Ustrezna razločka lahko določimo iz Bodejevega diagrama. Za  $K = 10$  in  $K = 100$  ju prikazuje slika 2.62.

Pri  $K = 10$  je fazni razloček

$$\Phi_m = 21^\circ \quad (2.137)$$

ojačevalni razloček pa

$$K_m = 8 \text{ dB} \quad (2.138)$$



Slika 2.62: Bodejev diagram a)  $K = 10$   
b)  $K = 100$

torej je sistem stabilen. Pri  $K = 100$  (premahnemo le os 0 dB za 20 dB navzdol) je

$$\Phi_m = -30^\circ \quad (2.139)$$

$$K_m = -12 \text{ dB} \quad (2.140)$$

torej je sistem nestabilen.

Ocene razločkov temeljijo na asimptotskih potekih logaritmov absolutnih vrednosti in zato nekoliko odstopajo od natančno izračunanih vrednosti.

Že pri  $K = 10$  ne dosegamo ustreznega faznega razločka  $30^\circ$  do  $60^\circ$ . Tega bi sicer lahko dosegli z zmanjšanjem ojačenja. Toda ojačenje  $K$  je pri sistemu 1. vrste merilo za pogrešek v ustaljenem stanju pri linearno naraščajočem referenčnem signalu ( $e_{ss} = \frac{R_0}{K_v}$ ), kar pomeni, da poslabšamo delovanje regulacijskega sistema pri počasi se spreminjajočih signalih. Zato obstajajo bolj učinkoviti postopki, ki



z dinamičnimi kompenzacijskimi členi preoblikujejo frekvenčno karakteristiko, ne da bi pri tem poslabšali delovanje regulacijskega sistema v ustaljenem stanju.

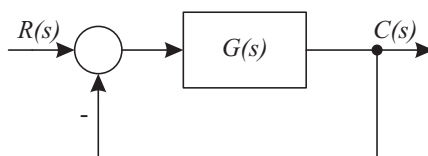
□

## 2.6 Frekvenčna karakteristika zaprtozančnega sistema

Za določitev stabilnosti zaprtozančnega sistema smo potrebovali le frekvenčno karakteristiko odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$ . Za celovitejšo analizo pa včasih potrebujemo tudi *frekvenčno karakteristiko zaprtozančnega sistema*.

Frekvenčno karakteristiko zaprtozančnega regulacijskega sistema je možno določiti iz odprtozančne karakteristike. Postopki so enostavni zlasti v primeru, če ima regulacijski sistem enotino povratno zanko. Zato se bomo omejili predvsem na take sisteme.

Slika 2.63 prikazuje regulacijski sistem z enotino povratno zanko.

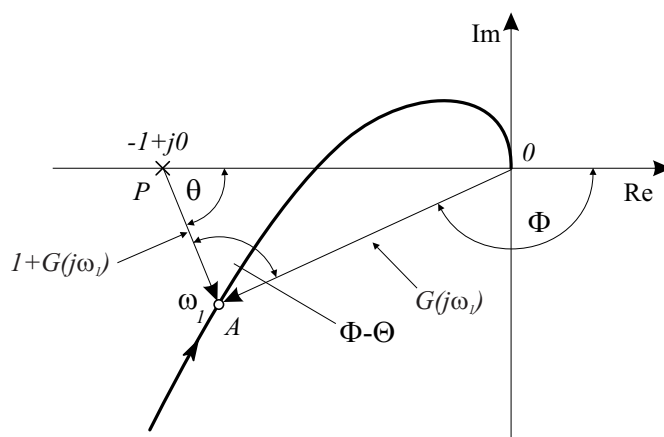


Slika 2.63: Regulacijski sistem z enotino povratno zanko

Zaprtozančna prenosna funkcija je

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.141)$$

Slika 2.64 prikazuje polarni diagram nekega odprtozančnega sistema  $G(j\omega)$ . Na polarnem diagramu izberimo točko  $A$ , ki jo določa frekvenca  $\omega_1$ .  $G(j\omega_1)$  je podan s kompleksorjem  $\vec{OA}$ . Dolžina kompleksorja podaja  $|G(j\omega_1)|$ , kot  $\Phi$  pa je fazni kot  $\angle[G(j\omega_1)]$ . Kompleksor  $\vec{PA}$ , ki povezuje točko  $-1 + j0$  in točko  $A$ , predstavlja  $1 + G(j\omega_1)$ . Dolžina kompleksorja podaja  $|1 + G(j\omega_1)|$ , kot  $\Theta$  pa je  $\angle[1 + G(j\omega_1)]$ . Kvocien obeh kompleksorjev predstavlja zaprtozančno frekvenčno karakteristiko.



Slika 2.64: Polarni diagram

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{C(j\omega_1)}{R(j\omega_1)} \quad (2.142)$$

Absolutna vrednost zaprtozančne frekvenčne karakteristike pri frekvenci  $\omega_1$  je razmerje dolžin  $\overrightarrow{OA}$  in  $\overrightarrow{PA}$ , fazni kot pri frekvenci  $\omega_1$  pa je  $\Phi - \Theta$ . Z ustreznimi merjenji pri različnih frekvencah lahko dobimo zaprtozančno frekvenčno karakteristiko.

### 2.6.1 Preslikava polarne diagrama - M in N krogi

S pomočjo preslikave odprtozančne frekvenčne karakteristike  $G(j\omega)$  s kompleksno funkcijo  $\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$  bomo v kompleksni ravnini določili *krivulje konstantne absolutne vrednosti* in *konstantnega faznega kota* zaprtozančnega sistema. Na ta način bomo lahko iz polarne diagrama odprtozančnega sistema odčitavali vrednosti zaprtozančne frekvenčne karakteristike.

Zapišimo frekvenčno karakteristiko zaprtozančnega sistema v polarni obliki

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{j\alpha} \quad (2.143)$$

M je absolutna vrednost,  $\alpha$  pa fazni kot frekvenčne karakteristike zaprtozančnega

sistema.

### Krivulje konstantne absolutne vrednosti (M krogi)

Zapišimo odprtozančno frekvenčno karakteristiko v obliki realne in imaginarne komponente

$$G(j\omega) = X + jY \quad (2.144)$$

kjer sta  $X$  in  $Y$  realni vrednosti. Absolutna vrednost zaprtozančne frekvenčne karakteristike je določena z izrazom

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|} \quad (2.145)$$

S kvadriranjem enačbe (2.145) dobimo

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2} \quad (2.146)$$

Torej je

$$X^2(1 - M^2) - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0 \quad (2.147)$$

Če velja  $M = 1$ , potem se enačba (2.147) glasi

$$X = -\frac{1}{2} \quad (2.148)$$

Torej je to premica, ki je vzporedna imaginarni osi v ravnini  $G(j\omega)$ .

Če  $M \neq 1$ , pa velja enačba

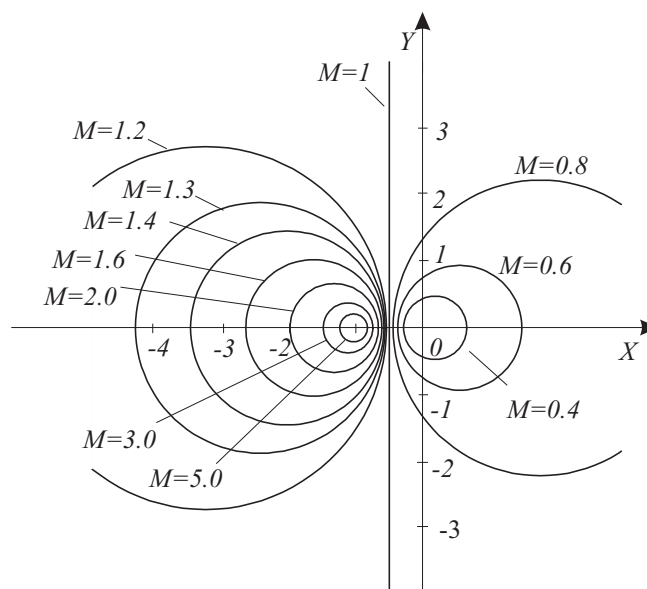
$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1}X + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = 0 \quad (2.149)$$

Če obema stranema enačbe (2.149) prištejemo  $\frac{M^2}{(M^2-1)^2}$ , dobimo izraz

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2-1)^2} \quad (2.150)$$

Enačba (2.150) je v kompleksni ravnini  $(X, Y)$  krog s središčem v točki  $X = -\frac{M^2}{M^2-1}$ ,  $Y = 0$  in s polmerom  $|\frac{M}{M^2-1}|$ .

Kroge, za katere je absolutna vrednost zaprtozančne frekvenčne karakteristike konstantna, prikazuje slika 2.65. Imenujemo jih M krogi.



Slika 2.65: Družina M krogov

Pri  $M \rightarrow \infty$  krogi limitirajo v točko  $-1 + j0$ . Pri  $M \rightarrow 0$  pa limitirajo krogi v točko 0.

### Krivulje konstantnega faznega kota (N krogi)

Če je zaprtozančna frekvenčna karakteristika  $\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = Me^{j\alpha}$  in je odprtozančna frekvenčna karakteristika  $G(j\omega) = X + jY$ , velja

$$\alpha = \angle \left[ \frac{X + jY}{1 + X + jY} \right] \quad (2.151)$$

iz česar sledi, da je kot  $\alpha$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) - \arctan\left(\frac{Y}{1 + X}\right) \quad (2.152)$$

Če definiramo

$$\tan \alpha = N \quad (2.153)$$

potem je

$$N = \tan \left[ \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) - \arctan\left(\frac{Y}{1 + X}\right) \right] \quad (2.154)$$

Ker velja  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ , je

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \left( \frac{Y}{1+X} \right)} = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2} \quad (2.155)$$

oz.

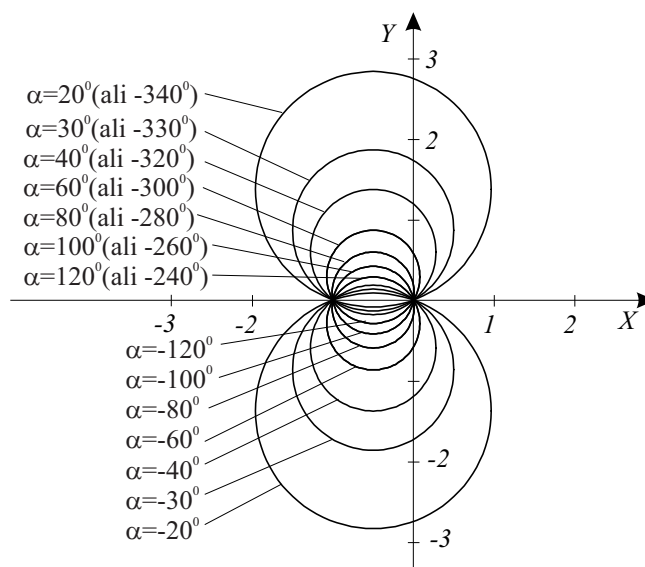
$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N}Y = 0 \quad (2.156)$$

Če prištejemo  $\frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2}$  obema stranema zgornje enačbe, dobimo izraz

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \quad (2.157)$$

ki predstavlja enačbo kroga s središčem pri  $X = -\frac{1}{2}$ ,  $Y = \frac{1}{2N}$  in s polmerom  $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2}}$ .

Za različne fazne kote izračunamo  $N = \tan \alpha$  in nato narišemo družino krogov, kot prikazuje slika 2.66. Družino krogov imenujemo N krogi. Vsi krogi gredo skozi točki  $-1 + j0$  in  $0$ .



Slika 2.66: N krogi

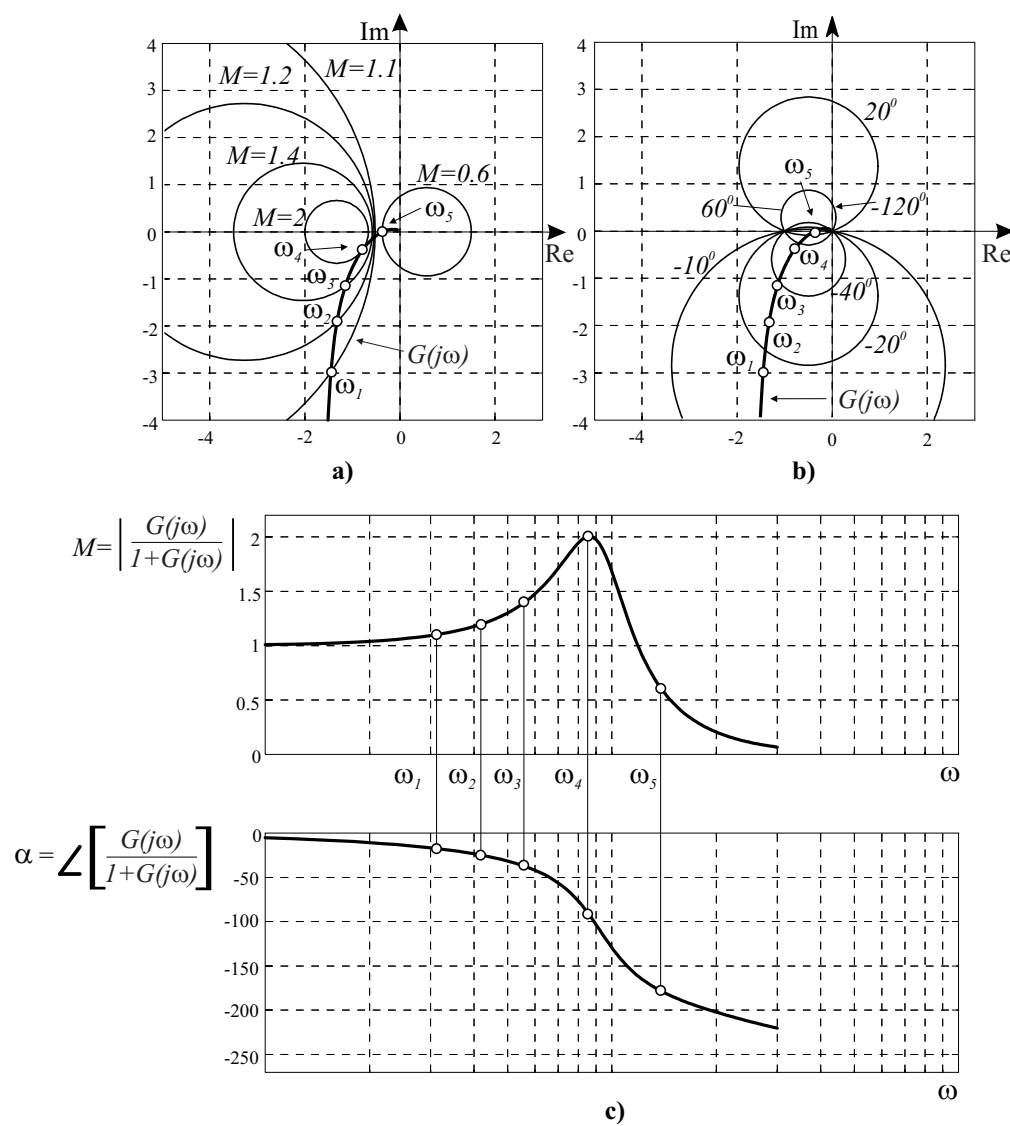
Določenemu faznemu kotu pripada le del kroga. Tako npr. odseka za  $\alpha = 60^\circ$  in  $\alpha = -120^\circ$  sestavljata en krog.

Postopek risanja zaprtozančne frekvenčne karakteristike je naslednji: vzamemo diagram, kjer so včrtani M in N krogi. Nato v isti diagram vrišemo polarni diagram  $G(j\omega)$ . Presečišča polarnega diagrama in M, N krogov podajajo točke absolutne vrednosti in faznega kota zaprtozančnega regulacijskega sistema, pri čemer predpostavimo, da poznamo frekvence, ki pripadajo presečiščem. Zlasti je pomemben krog, ki je tangencialen glede na polarni diagram. Ta krog predstavlja resonančni vrh zaprtozančnega sistema  $M_r$ , saj določa največjo absolutno vrednost zaprtozančne frekvenčne karakteristike.

**Primer 2.14** S pomočjo M in N krogov ter polarnega diagrama odprtozančne prenosne funkcije določimo frekvenčno karakteristiko zaprtozančnega sistema. Pri tem izberimo tiste frekvence na polarnem diagramu, ki določajo presečišča z vrisanimi M krogi. Pri istih frekvencah seveda ne dobimo presečišč z vrisanimi N krogi, zato si lahko pomagamo le z interpoliranjem.

Postopek prikazuje slika 2.67.

□



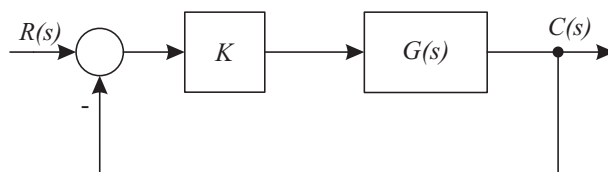
Slika 2.67: Določevanje frekvenčne karakteristike zaprtozančnega sistema z uporabo M in N krogov a) določitev absolutne vrednosti

b) določitev faznega kota

c) prenos v Bodejev diagram

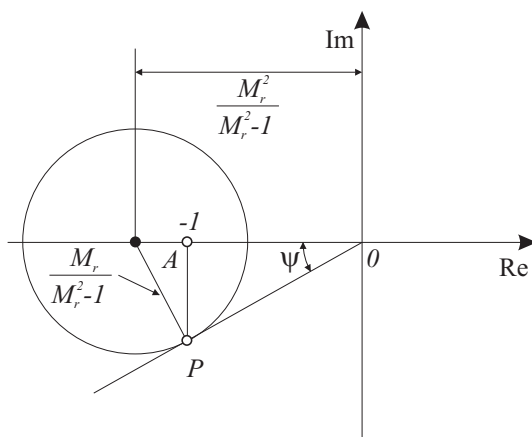
### Določitev ojačenja za doseg predpisanega resonančnega vrha s pomočjo $M$ krogov

Uporabnost  $M$  krogov bomo prikazali na primeru načrtovanja ojačenja v regulacijskem sistemu (npr.  $P$  regulatorja). Predpostavljamo, da imamo tako obliko odprtozančne prenosne funkcije  $K \cdot G(s)$  (glej sliko 2.68), ki v zaprti zanki omogoča resonančni vrh, t.j. neko maksimalno vrednost absolutne vrednosti frekvenčne karakteristike  $M_r$ .



Slika 2.68: Regulacijski sistem

Slika 2.69 prikazuje, kakšen je kot, ki ga oklepa tangenta na  $M_r$  krog.



Slika 2.69:  $M_r$  krog

Velja

$$\sin \Psi = \left| \frac{\frac{M_r}{M_r^2 - 1}}{\frac{M_r^2}{M_r^2 - 1}} \right| = \frac{1}{M_r} \quad (2.158)$$

Enostavno je možno dokazati, da gre pravokotnica iz točke  $P$  na negativno realno os v točko  $A = -1$ .



Postopek za določitev ojačenja  $K$ , ki zagotovi ustrezni resonančni vrh  $M_r$  zaprtozančne prenosne funkcije je naslednji:

1. Narišemo polarni digram  $G_1(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{K}$ .
2. Iz izhodišča narišemo poltrak pod kotom  $\Psi = \arcsin(\frac{1}{M_r})$  od negativne realne osi.
3. Narišemo krog, ki ima središče na negativni realni osi in se tangencialno dotika polarnega diagrama in poltraka. Kjer se dotika poltraka, dobimo točko  $P$ .
4. Narišemo pravokotnico iz točke  $P$  na negativno realno os (v točko  $A$ ).
5. Če je slučajno točka  $A$  v točki  $-1 + j0$ , potem je  $K = 1$ , sicer pa je  $K = \frac{1}{0A}$ .

**Primer 2.15** Odprtozančna prenosna funkcija je

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)} \quad (2.159)$$

Določimo ojačenje  $K$ , tako da bo resonančni vrh zaprtozančne prenosne funkcije  $M_r = 1.4$ .

Najprej določimo

$$G_1(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega)} \quad (2.160)$$

Nato izračunamo kot  $\Psi$

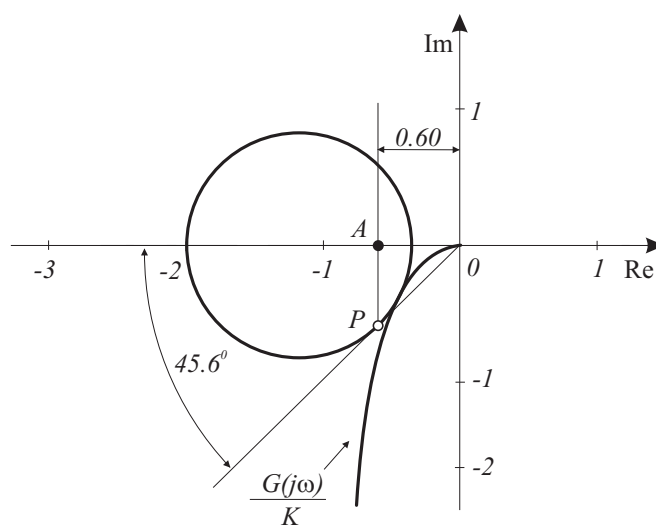
$$\Psi = \arcsin \frac{1}{M_r} = 45.6^\circ \quad (2.161)$$

Nato narišemo polarni diagram  $G_1(j\omega)$  in poltrak pod kotom  $45.6^\circ$  iz koordinatnega izhodišča. Končno narišemo krog, ki je tangencialen na polarni diagram in na poltrak in ima središče na realni osi. Tako dobimo točko  $P$ . Pravokotnica iz točke  $P$  na negativno realno os določa točko  $A = -0.60$ .

Torej je potrebno ojačenje

$$K = \frac{1}{0.60} = 1.67 \quad (2.162)$$

Ustrezen postopek prikazuje slika 2.70



Slika 2.70: Določitev ojačenja s pomočjo  $M_r$  kroga

□

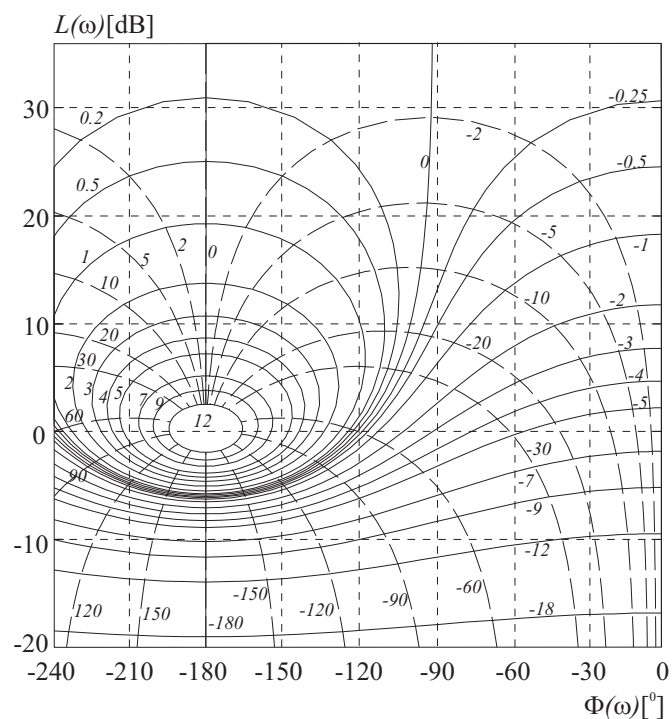
### 2.6.2 Preslikava Nicholsovega diagrama

Zaprtozančno frekvenčno karakteristiko lahko določimo tudi s preslikavo Nicholsovega diagrama.<sup>4</sup> V ravnini  $(L(\omega), \Phi(\omega))$  so krivulje konstantne absolutne vrednosti in krivulje konstantnega faznega kota zaprtozančnega sistema,<sup>5</sup> kot jih prikazuje slika 2.71.

Postopek določitve zaprtozančne frekvenčne karakteristike je podoben kot v primeru M in N krogov. Narišemo Nicholsov diagram in določimo presečišča s krivuljami konstantne absolutne vrednosti in konstantne faze zaprtozančnega sistema. Odčitane točke prenesemo v zaprtozančni frekvenčni diagram.

<sup>4</sup>Koordinatni sistem tvorita logaritem absolutne vrednosti  $L(\omega)$  in fazni kot  $\Phi(\omega)$ .

<sup>5</sup>Krivulje so analogne M in N krogom v kompleksni ravnini.



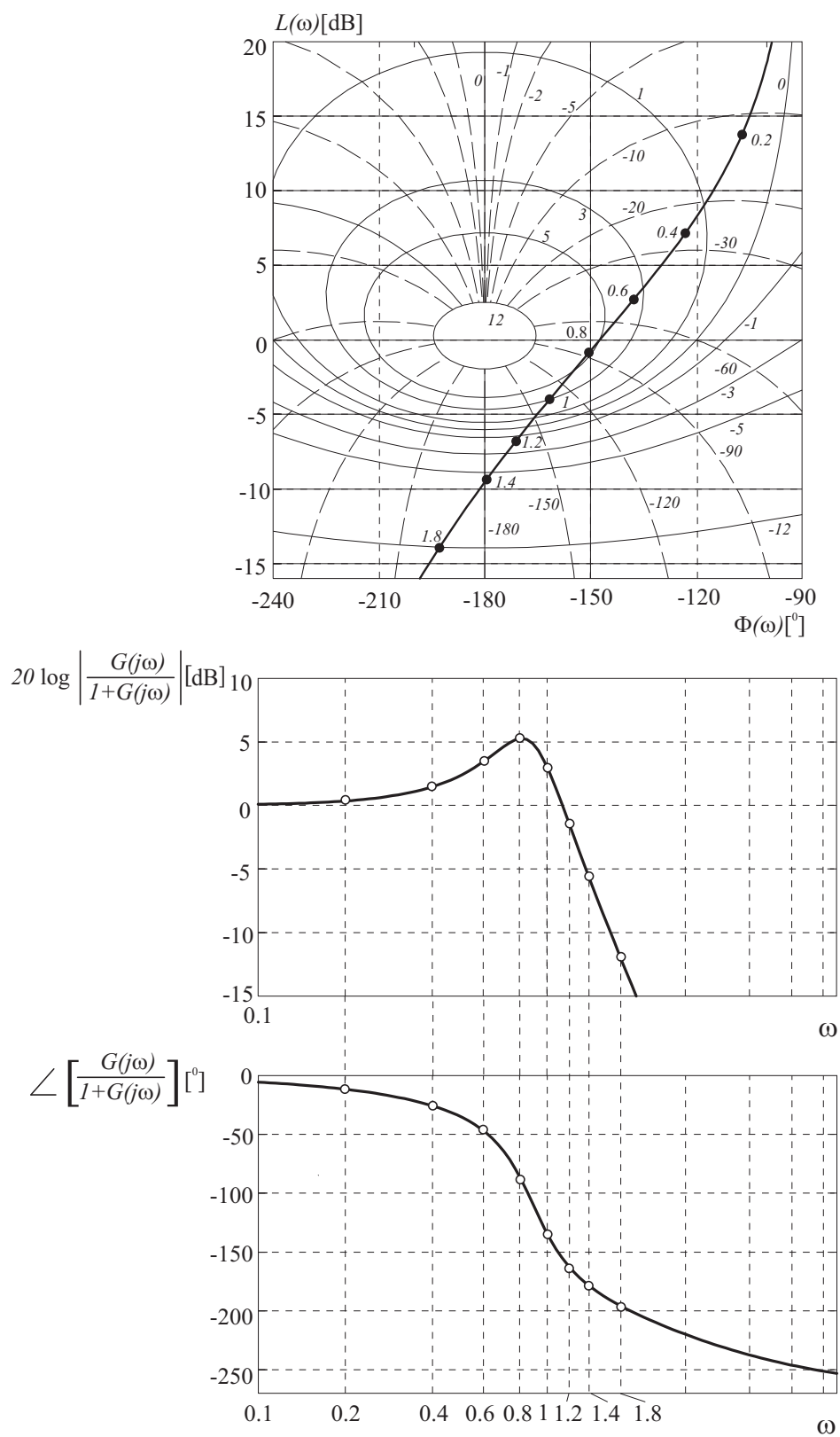
Slika 2.71: Diagram za določitev zaprtozančne frekvenčne karakteristike s pomočjo Nicholsovega diagrama

Krivulja konstantne absolutne vrednosti, ki se dotika Nicholsovega diagrama, določa resonančni vrh in frekvenco.

**Primer 2.16** Odprtozančna prenosna funkcija je

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)} \quad K = 1 \quad (2.163)$$

Slika 2.72 prikazuje postopek za določitev frekvenčne karakteristike zaprtozančnega sistema. □



Slika 2.72: Določevanje zaprtozančne frekvenčne karakteristike s pomočjo Nicholsovega diagrama

## 2.7 Pokazatelji kvalitete regulacije v frekvenčnem prostoru

Pri analizi in načrtovanju regulacijskih sistemov v časovnem prostoru smo uporabljali maksimalni prevzpon  $M_p$ , čas vzpona  $t_r$  in umiritveni čas  $t_s$  kot inženirske pokazatelje kvalitete delovanja regulacijskega sistema. Če se le ta vede v zaprti zanki podobno kot sistem 2. reda (dominantni konjugirano kompleksni par korenov), potem smo navedli tudi relacije med inženirskimi pokazatelji in parametri sistema 2. reda  $\zeta$  in  $\omega_n$  ( $\omega_n \geq \frac{2}{t_r}$ ,  $\zeta \geq 0.6(1 - M_p)$ ,  $\sigma = \zeta\omega_n \geq \frac{4}{t_s}$ ).

Tudi pri analizi in načrtovanju v frekvenčnem prostoru uporabljamo *inženirske pokazatelje*, ki so prav tako v zvezi s  $\zeta$  in  $\omega_n$ , če se sistem približno vede kot sistem 2. reda. Zato obstaja tudi korelacija časovnih inženirskih pokazateljev in frekvenčnih inženirskih pokazateljev. Glavni frekvenčni pokazatelji so prikazani na sliki 2.74.

### Resonančni vrh $M_r$

Obravnavali smo ga pri analizi frekvenčne karakteristike sistema 2. reda. Odvisen je od dušilnega koeficienta

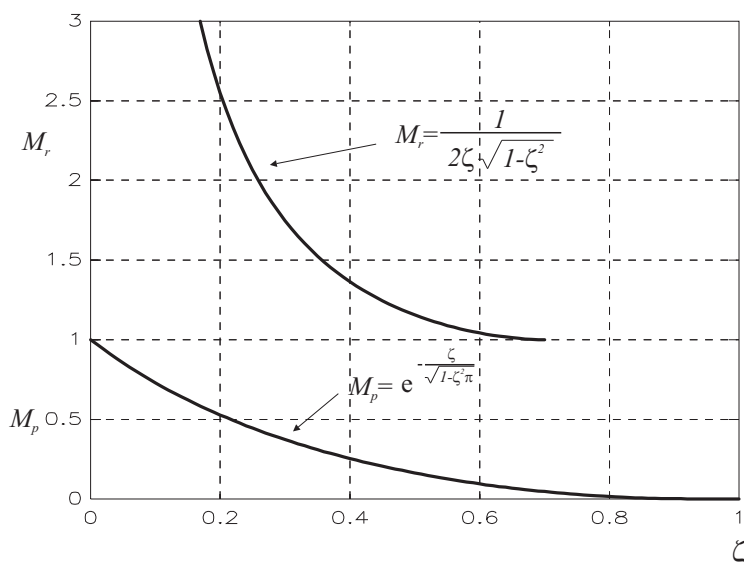
$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.164)$$

Ustrezno delovanje regulacijskega sistema običajno zahteva  $1.0 < M_r < 1.4$  ( $0 \text{ dB} < M_r [\text{dB}] < 3 \text{ dB}$ ), kar odgovarja dušilnemu koeficientu  $0.4 < \zeta < 0.7$ . Večja vrednost resonančnega vrha povzroči prevelik maksimalni prevzpon  $M_p$  v časovnem prostoru. Relacijo med  $\zeta$ ,  $M_r$  in  $M_p$  prikazuje slika 2.73.

### Resonančna frekvenca $\omega_r$

Resonančna frekvenca  $\omega_r$  je frekvenca, pri kateri pride do resonančnega vrha in je pokazatelj hitrosti prehodnega pojava, torej je obratno sorazmerna s časom vzpona  $t_r$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (2.165)$$

Slika 2.73: Relacija med  $\zeta$ ,  $M_r$  in  $M_p$ 

Pri majhnem dušilnem koeficientu je resonančna frekvenca približno enaka lastni frekvenci  $\omega_r \doteq \omega_n$ .

Če ima regulacijski sistem dobro izražen resonančni vrh, pride lahko do problemov, če nastopajo šumni signali v okolici frekvence  $\omega_r$ , kajti te frekvence se ojačujejo.

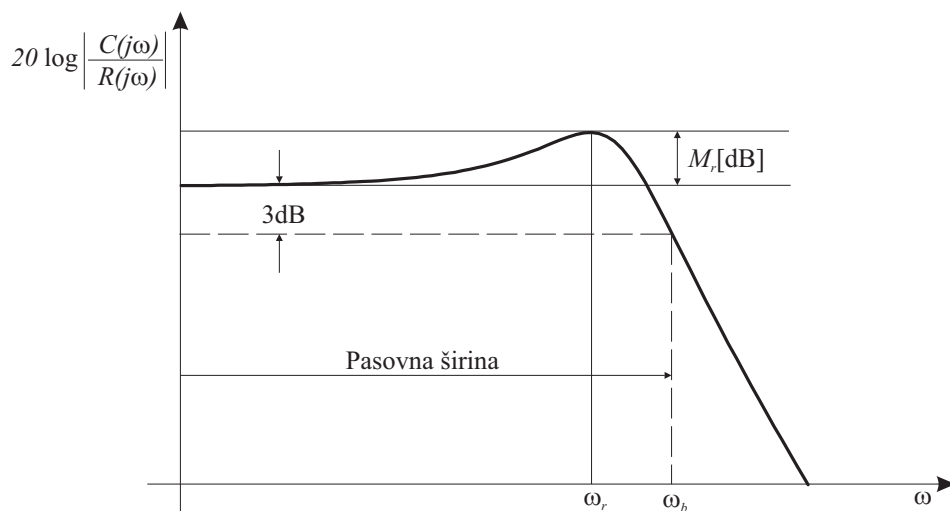
### Mejna frekvenca in pasovna širina (cutoff frequency, bandwidth)

Frekvenca, pri kateri je logaritem absolutne vrednosti frekvenčne karakteristike za 3 dB manjši kot pri frekvenci  $\omega = 0$  (oz. pri nizkih frekvencah), se imenuje mejna frekvenca ( $\omega_b$ ). Frekvenčno področje od  $\omega = 0$  do  $\omega = \omega_b$  pa se imenuje pasovna širina. Ustrezne pokazatelje prikazuje slika 2.74.

Velja torej

$$20 \log \left| \frac{C(j\omega_b)}{R(j\omega_b)} \right| = 20 \log \left| \frac{C(j0)}{R(j0)} \right| - 3 \text{dB} \quad (2.166)$$

V povezavi z mejno frekvenco in pasovno širino si predstavljamo regulacijski



Slika 2.74: Frekvenčna karakteristika, ki prikazuje mejno frekvenco in pasovno širino

sistem kot filter, ki prepušča frekvence  $\omega \leq \omega_b$  in zadrži frekvence  $\omega > \omega_b$ .

Na pasovno širino pretežno vpliva lastna frekvenca  $\omega_n$ . Večja vrednost  $\omega_n$  pomeni večjo pasovno širino in krajši čas vzpona. Obratna sorazmernost časa vzpona in pasovne širine je znana lastnost filtrov.

Hitro reagiranje regulacijskih sistemov zahteva veliko pasovno širino, kar tudi poudarja izvedbo regulacijskega sistema. Na drugi strani prisotnost motilnih signalov zahteva manjšo pasovno širino, zato je treba običajno izbrati nek kompromis.

Omenili smo torej nekatere inženirske pokazatelje, ki jih uporabljamo pri obravnavi regulacijskih sistemov v frekvenčnem prostoru. Pri tem ne smemo pozabiti na osnovno zahtevo - stabilnost. V zvezi s tem moramo predvsem upoštevati fazni in ojačevalni razloček.





### 3.

## Kompenzacijske metode za načrtovanje regulacijskih sistemov

V tem poglavju bomo predstavili *kompenzacijske metode* za načrtovanje regulacijskih sistemov. Kompenzacijo lahko definiramo kot spremembo odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  tako, da dobi zaprtozančni regulacijski sistem želeno delovanje. Postopek, ki ga bomo obravnavali, je primeren za linearne, časovno nespremenljive in univariabilne sisteme. Prikazali bomo nekatere načrtovalne postopke s pomočjo diagrama lege korenov in s pomočjo Bodejevega diagrama. Metode pokrivajo tako imenovan konvencionalni pristop pri načrtovanju regulacijskih sistemov, z uporabo modernih CACSD programskih orodij pa jih je možno učinkovito in enostavno uporabljati.

### 3.1 Osnove kompenzacijskih metod

#### Določitev zahtev za delovanje regulacijskega sistema

Določitev zahtev za ustrezno delovanje regulacijskega sistema predstavlja najpomembnejšo fazo pri načrtovanju. V grobem lahko zahteve razdelimo v:

- *Zahteve za delovanje v ustaljenem stanju* (pogrešek  $e_{ss}$ , konstante pogreškov,  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$ ).
- *Zahteve za vedenje v prehodnem pojavu* (čas vzpona, umiritveni čas, maksimalni prevzpon kot inženirski kriteriji oz.  $\zeta$  in  $\omega_n$ , če so direktno predpisani dominantni poli).
- *Zahteve v zvezi s frekvenčno karakteristiko* (ojačevalni in fazni razložek, resonančni vrh, pasovna širina).

Včasih so te zahteve podane v obliki natančnih numeričnih podatkov, včasih pa tudi v bolj opisni (kvalitativni) obliki. Vseh zahtev ni vedno mogoče izpolniti, ker so si med seboj v protislovju ali ker zahtevajo preveč zahtevno izvedbo kompenzatorja, zato jih je potrebno v načrtovalnem postopku včasih spremeniti. Zelo je pomembno, da ne podamo bolj strogih zahtev, kot je potrebno in da določimo, katere zahteve so pomembnejše.

### Konvencionalni pristop pri načrtovanju

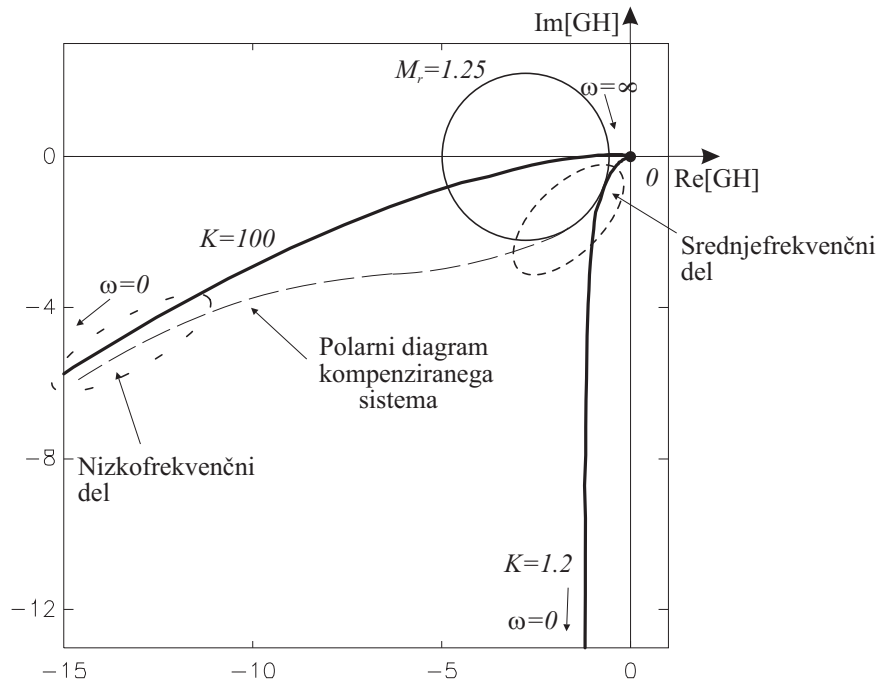
Zahteve, ki smo jih podali, so tipične za uporabo t.i. konvencionalnega pristopa pri načrtovanju regulacijskega sistema. Za tovrstni postopek načrtovanja kompenzatorjev je značilno, da običajno ni enoumno izvedljiv, ampak zahteva več poizkusov. Po načrtovalnem postopku je treba preveriti, če so izpolnjene vse zahteve in če niso, ga je potrebno ponoviti. Pri tem so izredno pomembne izkušnje načrtovalca, ki lahko precej zmanjšajo število poizkusov.

### Osnovne ideje kompenzacije

Neustrezno delovanje regulacijskega sistema je sicer možno izboljšati s preoblikovanjem dinamičnih lastnosti procesa. Toda takšen pristop je le malokdaj izvedljiv. Zato se bomo omejili na primere, ko dinamično obnašanje spremenimo s *kompensacijskim regulatorjem* (*kompenzatorjem*).

Pri vsakem načrtovanju najprej preverimo, ali je možno samo s spremembo ojačenja doseči ustrezne zahteve. Če to ni možno, je potrebno vgraditi dinamični kompenzator.

Polarni diagram zelo nazorno prikaže osnovno idejo kompenzacije, čeprav se v postopkih pogosteje uporabljata Bodejev diagram in DLK. Slika 3.1 prikazuje polarna diagrama odprtozančnega sistema



Slika 3.1: Polarni diagram sistema 1. vrste

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.0125s+1)} \quad (3.1)$$

pri vrednostih  $K = 1.20$  in  $K = 100$ . Ojačenje  $K = 1.2$  zagotavlja dovolj velik ojačevalni in fazni razloček ter resonančni vrh  $M_r = 1.25$ , ojačenje  $K = 100$  pa bi v primeru stabilnega delovanja<sup>1</sup> zagotavljalo dokaj natančno delovanje v ustaljenem stanju pri linearno naraščajočem referenčnem signalu enotinega naklona

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} = 0.01 \quad (3.2)$$

S spremembo ojačenja torej ne moremo izpolniti obeh zahtev.

<sup>1</sup>V tem primeru je sistem nestabilen

Osnovna ideja kompenzacije je v tem, da s pomočjo kompenzacijskega regulatorja dosežemo polarni diagram, ki je na sliki 3.1 prikazan črtkano. Na ta način dosežemo ustrezno delovanje v ustaljenem stanju, za katerega je odločilen nizkofrekvenčni del polarnega diagrama, ter ustrezen ojačevalni in fazni razložek (oz. resonančni vrh), za katerega je odločilen del polarnega diagrama pri srednjih frekvencah, t.j. okoli resonančne frekvence. To lahko naredimo na dva načina:

- a) *Modificiramo karakteristiko za  $K = 100$  pri srednjih in višjih frekvencah.*  
V tem primeru je v tem frekvenčnem področju potreben premik karakteristike v obratni smeri urinega kazalca - v odprtozančni karakteristiki je potrebno zmanjšati fazno zaostajanje oz. uvesti fazno prehitevanje. To nam omogoča *prehitevalni (lead) kompenzator*.
- b) *Modificiramo karakteristiko za  $K = 1.2$  pri nizkih frekvencah.*  
V tem frekvenčnem področju je potrebno dodati fazno zaostajanje. To nam omogoča *zakasnilni (lag) kompenzator*.

Kompenzacijo v regulacijskih sistemih izvajamo z *zakasnilnimi, prehitevalnimi* ter z ustrezno *kombiniranimi (zakasnilno - prehitevalnimi) kompenzatorji*.

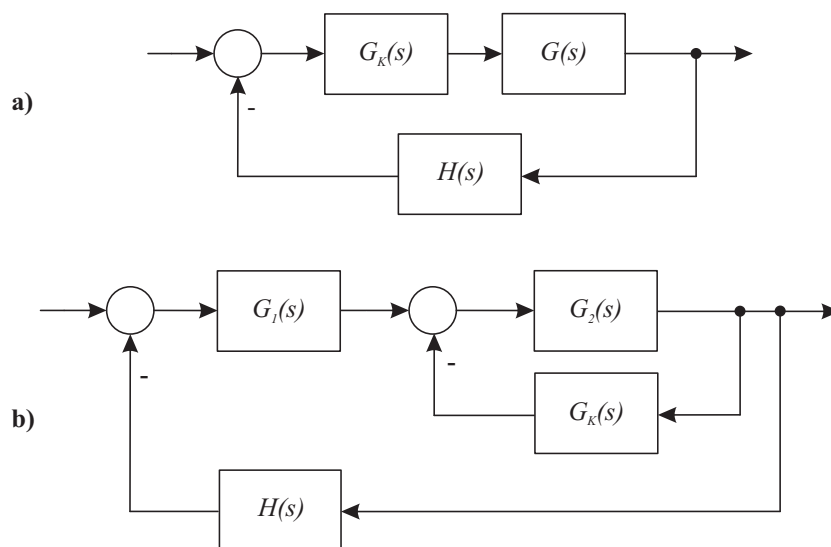
### Vrste kompenzacijskih metod

Slika 3.2 prikazuje dva najpogostejša načina za preoblikovanje dinamičnih karakteristik regulacijskega sistema.

Slika 3.2a prikazuje shemo, v kateri je kompenzacijski regulator  $G_K(s)$  v zaporedni povezavi s procesom  $G(s)$ . Zato to kompenzacijo imenujemo *zaporedna kompenzacija*. Drugi možni način pa prikazuje slika 3.2b. V tem primeru je kompenzator vključen v notranjo povratno zanko. Taki kompenzaciji pravimo *povratnozančna kompenzacija*. Izbira ene ali druge metode zavisi od dostopnih signalov, od regulacijskih elementov, ki jih imamo na voljo, od izkušenj načrtovalca, od ekonomskih faktorjev itd.

Zaradi enostavnosti se bomo omejili le na zaporedno kompenzacijo. Glede na uporabljen metodo v načrtovalnem postopku si bomo ogledali:

- načrtovanje s pomočjo diagramov lege korenov,
- načrtovanje s pomočjo frekvenčnih (Bodejevih) diagramov.



Slika 3.2: Kompenzacijske metode a) zaporedna kompensacija  
b) povratnozančna kompensacija

### Načrtovanje s pomočjo diagramov lege korenov

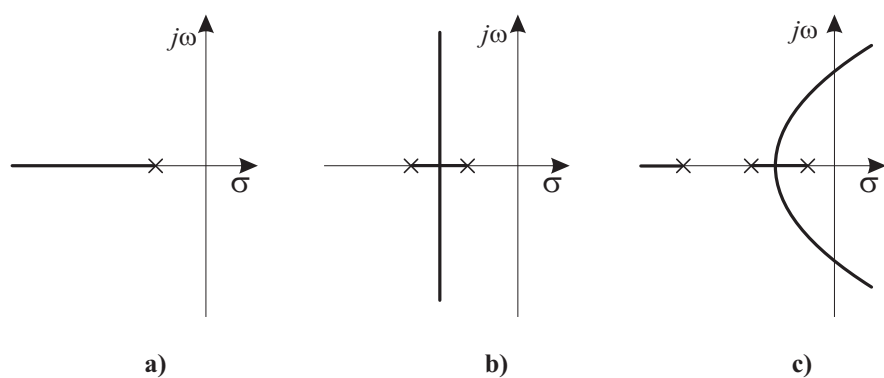
Diagram lege korenov v prvi vrsti uporabimo, če so zahteve vodenja zaprtozančnega sistema podane z lego *dominantnega para polov* ( $\zeta, \omega_n$ ). Ker DLK prikazuje potek zaprtozančnih polov pri spreminjajočem ojačenju, nam zelo nazorno prikaže, ali je že s samo spremembo *ojačenja* možno doseči ustrezno lego polov. Če to ni možno, je potrebno v zanko vključiti *dodatne pole in ničle*, t.j. *dinamični kompenzacijski regulator*. Ta mora tako preoblikovati DLK, da le-ta poteka skozi želeni dominantni par polov.

*Dodatni pol* v odprtozančni prenosni funkciji  $G(s)H(s)$  učinkuje na DLK tako, da ga *premakne v desno*. S tem se zmanjša relativna stabilnost ter upočasni prehodni pojav. Posebni primer takega pola je pol v koordinatnem izhodišču.<sup>2</sup> Slika 3.3 prikazuje učinek dodatnih polov k sistemu 1. reda.

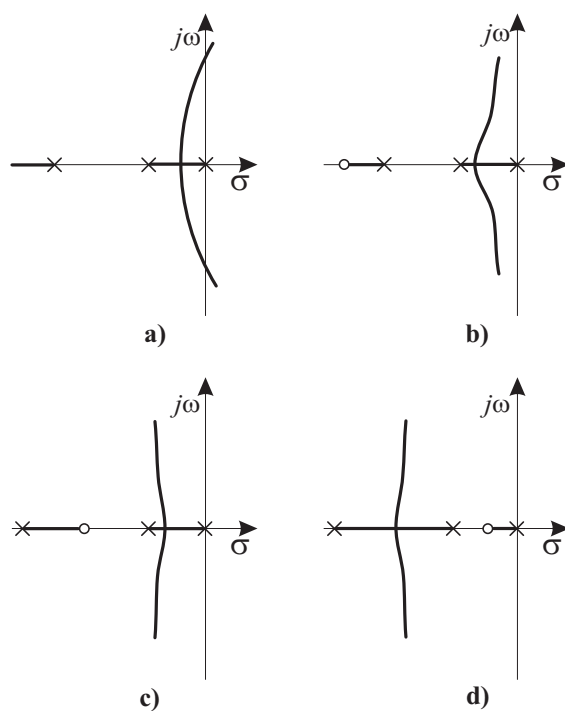
*Dodatna ničla* v odprtozančni prenosni funkciji *premakne* DLK *proti levi*. Zato postane zaprtozančni sistem stabilnejši in hitrejši. Posebni primer take ničle je ničla v koordinatnem izhodišču.<sup>3</sup> Slika 3.4 prikazuje učinek dodatne ničle pri sistemu 3. reda. Vidimo, da ničla neglede na lego stabilizira sistem.

<sup>2</sup>Tak pol da sistemu integrirni značaj

<sup>3</sup>Taka ničla da sistemu diferencirni značaj



Slika 3.3: a) DLK sistema 1. reda  
b) učinek dodatnega pola  
c) učinek dodatnega pola h konfiguraciji b



Slika 3.4: a) DLK sistema 3.reda  
b),c),d) učinek dodatne ničle

### Načrtovanje s pomočjo frekvenčnih diagramov

Ustrezen prehodni pojav je ponavadi najpomembnejši pri načrtovanju regulacijskih sistemov. Medtem ko je pri uporabi DLK lega dominantnih polov v zelo direktni relaciji s prehodnim pojavom, pa je ta relacija pri uporabi frekvenčnih metod bolj indirektna. V tem primeru je prehodni pojav določen s *faznim* in *ojačevalnim razločkom*, *resonančnim vrhom*, *resonančno frekvenco*, *pasovno širino* in z ustrezno *konstanto pogreška* (ki vpliva na pogrešek v ustaljenem stanju). Pri tem se najpogosteje uporablja Bodejev diagram. V njem se namreč zelo nazorno vidi učinek frekvenčne karakteristike dodanega kompenzatorja, saj jo je potrebno le prišteti odprtozračni prenosni funkciji.

Nizkofrekvenčno področje Bodejevega diagrama ( $\omega \ll \omega_1$ ) določa vedenje v ustaljenem stanju zaprtozračnega sistema. Srednjefrekvenčno področje (okoli  $\omega_1$  in  $\omega_\pi$ ) določa relativno stabilnost. Visokofrekvenčno področje ( $\omega \gg \omega_1$ ) določa običajno kompleksnost sistema.

V številnih praktičnih primerih temelji kompenzacija s pomočjo frekvenčnih metod na zagotovitvi pa tudi kompromisu med vedenjem v ustaljenem stanju in ustrezno relativno stabilnostjo.

V grobem je načrtovalni postopek običajno naslednji: najprej nastavimo tako ojačenje, da zagotovimo potrebno konstanto pogreška oz. ustrezno vedenje v ustaljenem stanju. Nato narišemo Bodejev diagram nekompenziranega odprtozračnega sistema z upoštevanjem prej določenega ojačenja. Če niso izpolnjene zahteve ojačevalnega in faznega razločka, je potrebno z dinamičnim kompenzacijskim regulatorjem preoblikovati Bodejev diagram. Šele ko to dosežemo, skušamo izpolniti še kakšne dodatne kriterije, če le ti niso protislovni prejšnjim. Pri tem so pomembne tudi določene izkušnje o tem, kakšne so želene in nezaželene oblike frekvenčnih karakteristik.

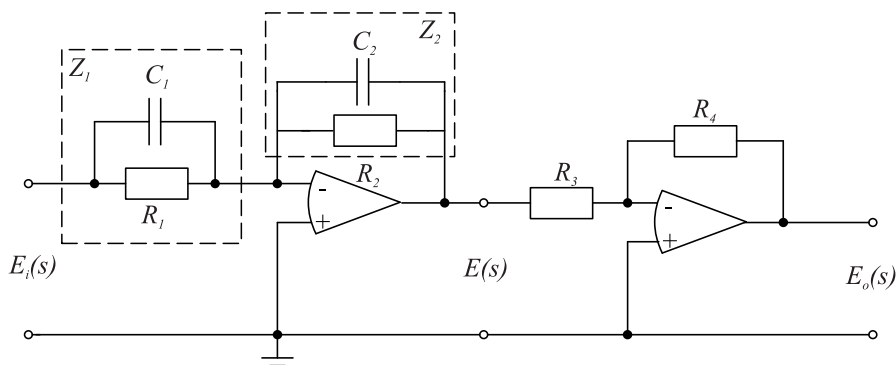
### Značilnosti prehitevalnega, zakasnilnega in prehitevalno-zakasnilnega kompenzatorja

Prehitevalni kompenzator običajno načrtamo tako, da ima velik učinek na prehodni pojav in majhen učinek na ustaljeno stanje. Lahko ojačuje srednje frekvenčne in visokofrekvenčne signale. Zakasnilni kompenzator pa zmanjšuje pogrešek v ustaljenem stanju vendar delno na račun hitrosti prehodnega pojava. Duši visokofrekvenčne signale. Prehitevalno-zakasnilni kompenzator združuje

lastnosti obeh. Medtem ko prva dva kompenzatorja povečata red sistema za ena, pa slednji poveča red za dve (če ne pride do morebitnega krajšanja polov z ničlami).

### Izvedba kompenzatorjev

Obstajajo različni načini za izvedbo kompenzatorjev: s pomočjo pnevmatskih, hidravličnih ali mehanskih elementov, s pomočjo RC vezij, z elektronskimi vezji ali pa z ustrezno programsko opremo (realizacija diferencialnih oz. diferenčnih enačb) v procesnih računalnikih. Slika 3.5 prikazuje elektronski kompenzator, ki je lahko prehitevalni ali zakasnilni.



Slika 3.5: Prehitevalni ali zakasnilni kompenzator

Ker sta vhodna in povratnozančna impedanca

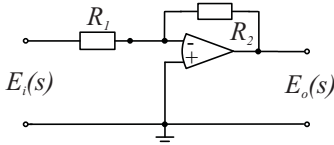
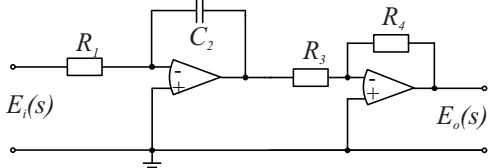
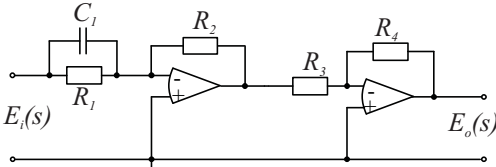
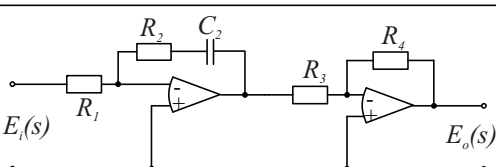
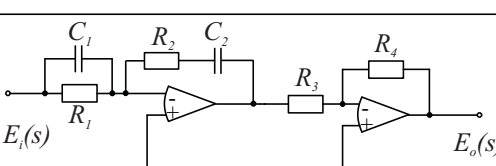
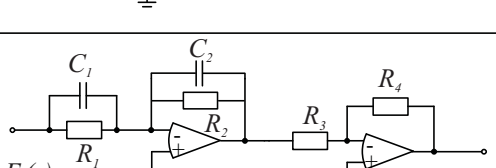
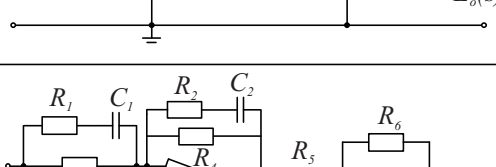
$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \quad Z_2 = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} \quad (3.3)$$

velja, da je prenosna funkcija kompenzatorja

$$G_K(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 Z_2}{R_3 Z_1} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \quad (3.4)$$

Slika 3.6 prikazuje tudi razna druga elektronska kompenzacijska vezja, ki vključujejo tudi razne oblike *PID* regulatorjev.



|   | Vrste<br>kompensatorja<br>oz. regulatorja | $G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$                                                                                  | Elektronsko vezje                                                                    |
|---|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | P                                         | $-\frac{R_2}{R_1}$                                                                                              |    |
| 2 | I                                         | $\frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_1 C_2 s}$                                                                           |    |
| 3 | PD                                        | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} (R_1 C_1 s + 1)$                                                               |    |
| 4 | PI                                        | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2 C_2 s}$                                               |   |
| 5 | PID                                       | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$                              |  |
| 6 | Prehitevalni<br>ali<br>zakasnilni         | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$                                           |  |
| 7 | Zakasnilno<br>prehitevalni                | $\frac{R_6 R_4}{R_5 R_3} \frac{[(R_1 + R_3) C_1 s + 1](R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)[(R_2 + R_4) C_2 s + 1]}$ |  |

Slika 3.6: Elektronska vezja, ki se lahko uporabljajo kot različni kompenzacijski regulatorji

## 3.2 Prehitevalna kompenzacija

### 3.2.1 Prehitevalni kompenzacijski regulator

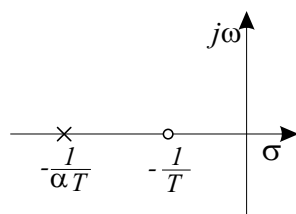
Enačba (3.4) predstavlja *prehitevalni kompenzacijski regulator*, če velja  $R_1C_1 > R_2C_2$ . V splošni obliki ga podaja izraz

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.5)$$

pri čemer je v primeru elektronskega regulatorja

$$T = R_1C_1 \quad \alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1} \quad K_K = \frac{R_4C_1}{R_3C_2} \quad (3.6)$$

Prehitevalni kompenzator ima ničlo pri  $s = -\frac{1}{T}$  in pol pri  $s = -\frac{1}{\alpha T}$ , torej je ničla vedno desno od pola oz. bliže koordinatnemu izhodišču. Zato ima ničla odločilnejši vpliv, torej prehitevalni kompenzator premakne DLK v levo. Ustrezno lego pola in ničle prikazuje slika 3.7.

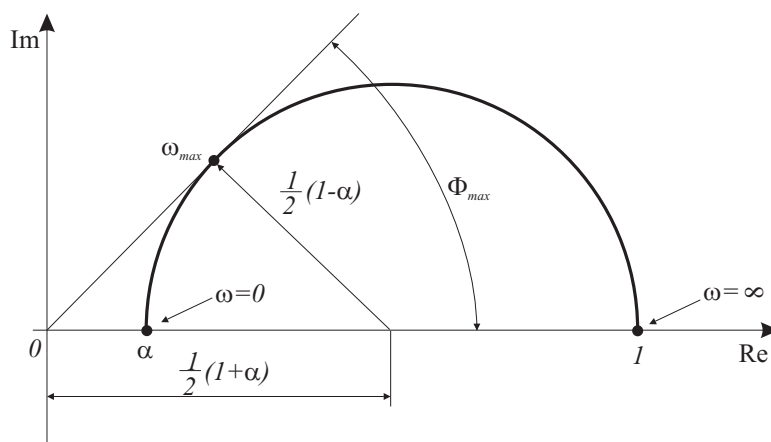


Slika 3.7: Pol in ničla pri prehitevalnem kompenzacijskem regulatorju

$\alpha$  je torej razmerje med lego ničle in lego pola. Minimalni  $\alpha$  je odvisen od načina realizacije kompenzatorja. Običajno ga izberemo tako, da je  $1 > \alpha \geq 0.1$ .

Slika 3.8 prikazuje polarni diagram prehitevalnega kompenzatorja

$$G_K(j\omega) = K_K \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (3.7)$$



Slika 3.8: Polarni diagram prehitevalnega kompenzatorja

za  $K_K = 1$ .

Vidimo, da je fazni kot na celotnem frekvenčnem področju pozitiven. Tangenta iz koordinatnega izhodišča na polkrog določa maksimalno fazno prehitevanje  $\Phi_{max}$  pri frekvenci  $\omega_{max}$

$$\sin \Phi_{max} = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (3.8)$$

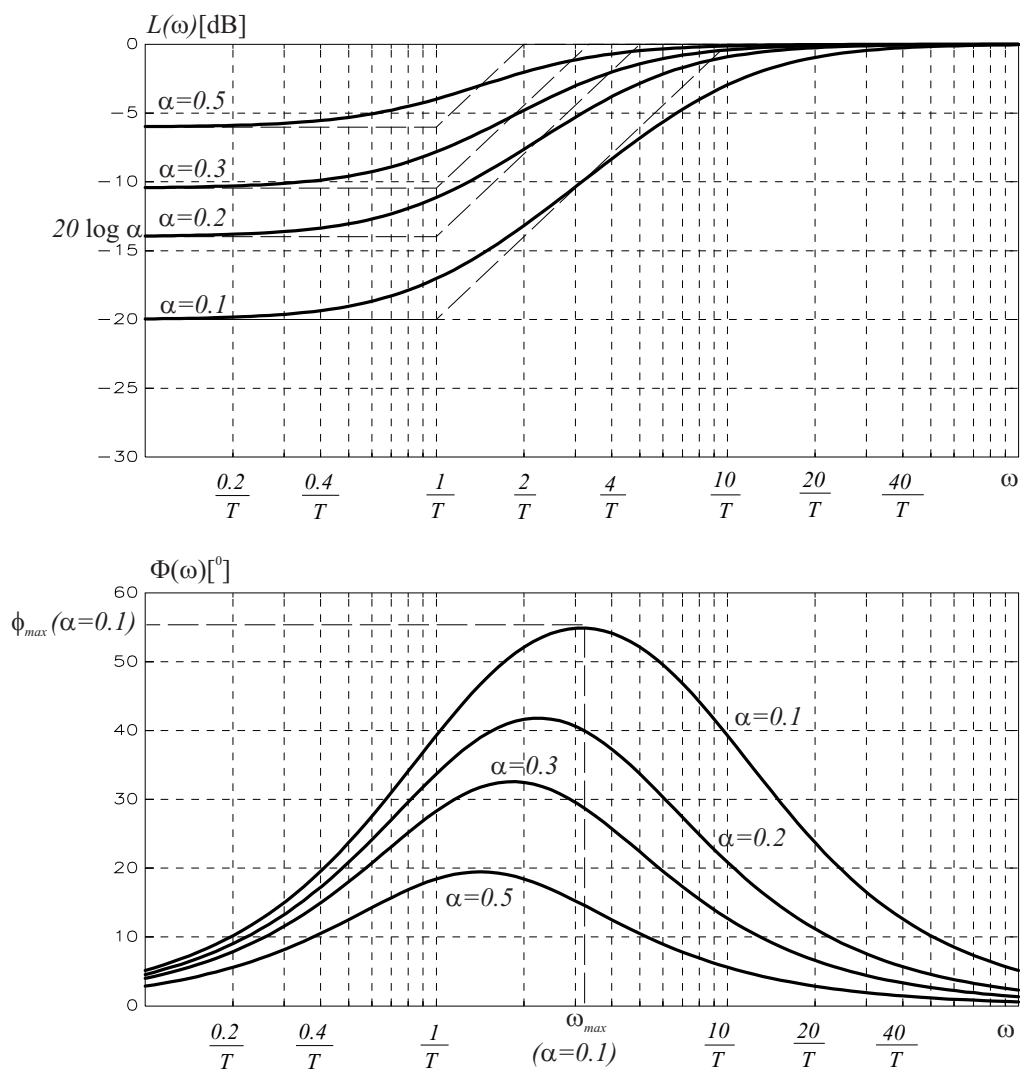
oz.

$$\Phi_{max} = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (3.9)$$

in torej zavisi le od razmerja  $\alpha$ . Če je minimalni možni  $\alpha = 0.1$ , potem je maksimalno možno prehitevanje  $\Phi_{max} \doteq 55^\circ$ . Kadar načrtovalni postopek zahteva  $\alpha < 0.1$  oz.  $\Phi_{max} > 55^\circ$ , lahko uporabimo dva zaporedno povezana kompenzatorja (to je potrebno pri elektronski izvedbi, pri računalniški izvedbi pa lahko dosežemo poljubna fazna prehitevanja).

Slika 3.9 prikazuje Bodejeve diagrame prehitevalnega kompenzatorja za  $K_K = 1$  pri različnih konstantah  $\alpha$ . Vidimo, da sta lomni frekvenci  $\omega = \frac{1}{T}$  in  $\omega = \frac{1}{\alpha T}$ . Maksimum fazne karakteristike se nahaja v geometrični sredini med lomnima frekvencama

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \quad (3.10)$$



Slika 3.9: Bodejev diagram prehitevalnega kompenzatorja

Kompenzator se obnaša kot visokopasovni filter. Nizke frekvence zadrži, visoke pa se prenašajo brez dušenja (če je  $K_K = 1$ ).

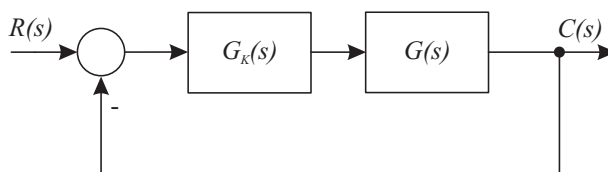
### 3.2.2 Prehitevalna kompenzacija s pomočjo diagrama lege korenov

Diagram lege korenov uporabimo, če so podane naslednje zahteve:

- dušilni koeficient,
- lastna frekvenca,
- maksimalni prevzpon,
- čas vzpona,
- umiritveni čas,

to so zahteve, ki so direktno povezane s časovnim odzivom.

Prehitevalno kompenzacijo uporabimo, če je zaprtozančni sistem nestabilen, ali če ima preveč nihajoč prehodni pojav, kar pomeni, da je potrebno DLK premakniti bolj proti levi, tako da dobimo ustrezni dominantni par korenov. Shemo za zaporedno kompenzacijo prikazuje slika 3.10.



Slika 3.10: Regulacijski sistem s prehitevalnim kompenzacijskim regulatorjem

Postopek načrtovanja lahko opišemo v naslednjih točkah:

1. Iz danih zahtev določimo želeno lego dominantnih zaprtozančnih polov.
2. Narišemo DLK nekompenziranega sistema ( $G(s)$ ). Ugotovimo, ali je možno samo s spremembo ojačenja doseči želene pole. To je možno v primeru, če DLK že poteka skozi zahtevane pole.
3. Če to ni možno, je potrebno uporabiti prehitevalni kompenzator, če poteka DLK nekompenziranega sistema desno od zelenih polov.<sup>4</sup> Nato izračunamo, kakšen kot prehitevanja (kot  $\lambda$ ) mora vnesti prehitevalni kompenzator, da točki, ki določata zelena pola, postaneta točki DLK kompenziranega sistema (da je izpolnjen kotni pogoj).

<sup>4</sup>Prehitevalni kompenzator premakne DLK proti levi

4. Iz znanega kota  $\lambda$  določimo ničlo  $s = -\frac{1}{T}$  in pol  $s = -\frac{1}{\alpha T}$  prehitevalnega kompenzatorja

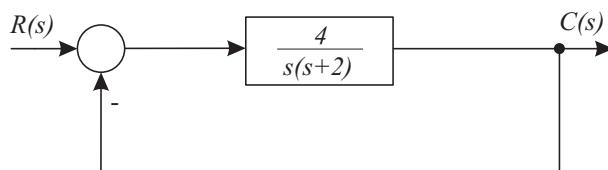
$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.11)$$

Kot  $\lambda$  je možno doseči z različnimi legami pola in ničle, torej z različnimi konstantami  $\alpha$ . Običajno želimo doseči čim večji  $\alpha$ , saj nam to povečuje konstanto pogreška oz. zmanjšuje ustaljeni pogrešek. Vendar v primeru, če je podana zahteva za konstanto pogreška, raje uporabimo Bodejev diagram.

5. Iz pogoja absolutne vrednosti (v zelenih polih) določimo odprtozančno ojačenje kompenziranega sistema in nato potrebno ojačenje kompenzatorja  $K_K$ .
6. Po končanem postopku vedno preverimo, ali smo izpolnili vse zahteve. Če jih nismo, moramo postopek ponoviti. Kadar je predpisana velika konstanta pogreška, je potrebno dodati zakasnilni kompenzator, tako da dobimo prehitevalno - zakasnilni kompenzator.

*Pri uporabi postopka moramo preveriti, ali je doseženi konjugirano kompleksni par polov dejansko dominanten, saj v nasprotnem primeru ne dosežemo zelenih ciljev.*

**Primer 3.1** Slika 3.11 prikazuje bločni diagram nekompenziranega regulacijskega sistema.



Slika 3.11: Nekompenzirani regulacijski sistem

S primernim kompenzacijskim regulatorjem želimo doseči tako lego dominantnega para zaprtozančnih polov, da bo  $\omega_n = 4 \text{ rds}^{-1}$ ,  $\zeta$  pa naj pri tem ostane nespremenjen.

Odprtozančna prenosna funkcija je torej

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)} \quad (3.12)$$

Zaprtozančna prenosna funkcija pa je

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} = \frac{4}{(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})} \quad (3.13)$$

torej sta zaprtozančna pola

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.14)$$

Dušilni koeficient in lastna frekvenca nekompenziranega sistema sta

$$\zeta = 0.5 \quad \omega_n = 2\text{rds}^{-1} \quad (3.15)$$

konstanta hitrostnega pogoška pa je

$$K_v = 2s^{-1} \quad (3.16)$$

Slika 3.12 prikazuje DLK regulacijskega sistema

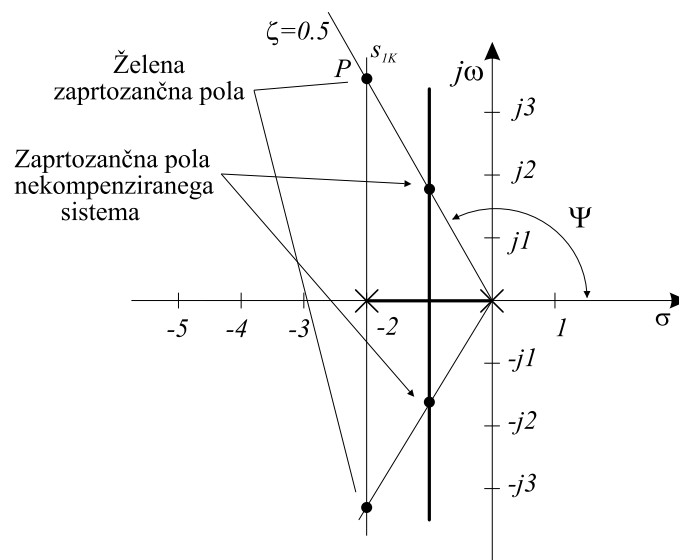
Kot, ki ga oklepa linija  $\zeta = 0.5$  z realno osjo je

$$\Psi = \arccos(-\zeta) = 120^\circ \quad (3.17)$$

Slika 3.12 prikazuje tudi lego zelenih zaprtozančnih polov ( $s_{1K,2K} = -2 \pm j2\sqrt{3}$ ).

Vidimo, da zelene lege ni možno doseči s spremembo ojačenja. DLK je treba nekoliko premakniti v levo s pomočjo preHITEVALnega kompenzatorja. Ker je kot nekompenziranega sistema  $G(s)$  v točki  $s_{1K}$

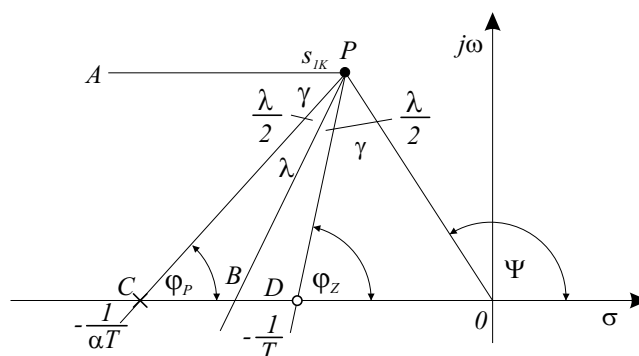
$$\angle[G(s_{1K})] = -\angle[s_{1K}] - \angle[s_{1K} + 2] = -\Psi - 90^\circ = -210^\circ \quad (3.18)$$



mora v zanki prehitevalni kompenzator v točko  $P$  vnesti  $30^0$  faznega prehitevanja, da bo rezultančni kot  $-180^0$  in da bo točka  $P$  pripadala DLK zaprtozračnega sistema. Torej je kot kompenzatorja

$$\lambda = 30^0 \quad (3.19)$$

Ustreden prehodevalni kompenzator bomo določili s pomočjo slike 3.13.



Slika 3.13: Določitev pola in ničle prehitevalnega kompenzatorja

Kot, ki ga prehitevalni kompenzator



$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (3.20)$$

vnaša v točko  $s_{1K}$  (točka  $P$ ), je

$$\angle[G_K(s_{1K})] = \angle\left[s_{1K} + \frac{1}{T}\right] - \angle\left[s_{1K} + \frac{1}{\alpha T}\right] = \varphi_Z - \varphi_P \quad (3.21)$$

Ker velja

$$\varphi_P + (180^0 - \varphi_Z) + \lambda = 180^0 \quad (3.22)$$

oz.

$$\lambda = \varphi_Z - \varphi_P \quad (3.23)$$

je

$$\angle[G_K(s_{1K})] = \lambda = 30^0 \quad (3.24)$$

Iz slike 3.13 je razvidno, da vsak kompenzator, katerega trikotnik  $CDP$  ima v oglišču  $P$  kot  $\lambda = 30^0$ , izpolnjuje zahteve. Za točno določitev pola in ničle bomo izbrali postopek, ki zagotavlja največjo možno vrednost  $\alpha$  in s tem največjo konstanto pogreška.

V točki  $P$  narišemo horizontalno linijo ( $PA$ ). Narišemo tudi povezavo med točko  $P$  in koordinatnim izhodiščem 0. Razpolovimo kot med  $PA$  in  $P0$  in dobimo povezavo do točke  $B$ . Nato narišemo liniji  $PC$  in  $PD$  tako, da na vsako stran povezave  $PB$  odmerimo kot  $\frac{\lambda}{2}$ . Ker velja tudi

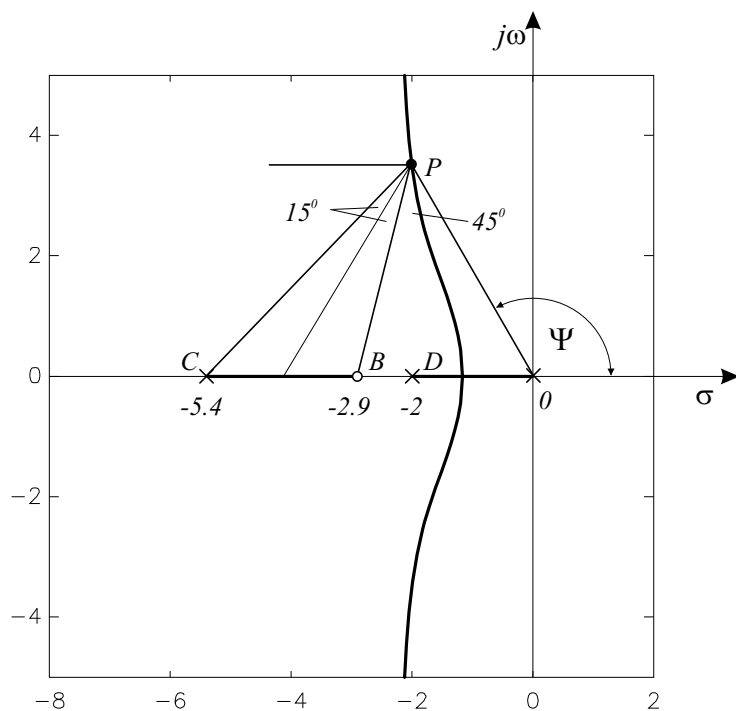
$$\gamma + \lambda + \gamma = \Psi \quad (3.25)$$

oz.

$$\gamma = \frac{\Psi - \lambda}{2} = 45^0 \quad (3.26)$$

lahko dobimo lego ničle  $s = -\frac{1}{T}$  tudi tako, da od povezave  $P0$  odmerimo kot  $\gamma$ . Pol  $s = -\frac{1}{\alpha T}$  pa dobimo tako, da od povezave  $PD$  odmerimo kot  $\lambda$ .

Slika 3.14 prikazuje lego ničle in pola kompenzatorja in ustrezno preoblikovani DLK kompenziranega sistema.



Slika 3.14: DLK kompenziranega sistema

Torej ima prehitevalni kompenzacijski regulator ničlo pri

$$s = -2.9 \quad (3.27)$$

in pol pri

$$s = -5.4 \quad (3.28)$$

Prenosna funkcija kompenzatorja je

$$G_K(s) = K_K \frac{s + 2.9}{s + 5.4} \quad (3.29)$$

Odprtozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema je

$$G_K(s)G(s) = K_K \frac{s + 2.9}{s + 5.4} \frac{4}{s(s + 2)} = \frac{K(s + 2.9)}{s(s + 2)(s + 5.4)} \quad (3.30)$$

pri čemer je  $K = 4K_K$ . Ojačenje  $K$  določimo tako, da je izpolnjen pogoj absolutne vrednosti v točki  $P$

$$\left| \frac{K(s + 2.9)}{s(s + 2)(s + 5.4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1 \quad (3.31)$$

Zgornja enačba je izpolnjena pri

$$K = 18.7 \quad (3.32)$$

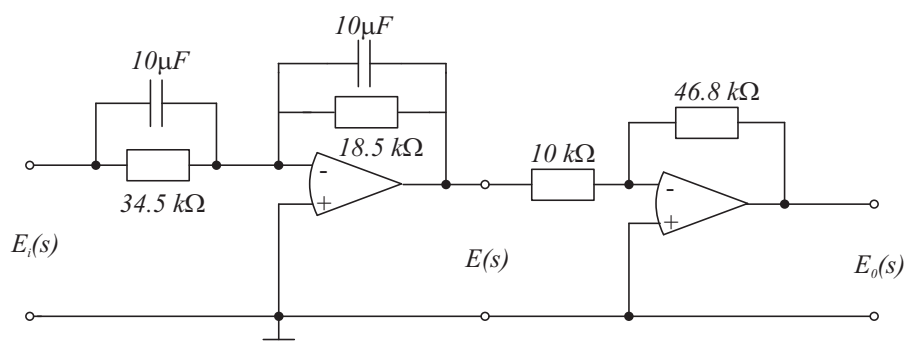
Torej je ojačenje kompenzatorja

$$K_K = \frac{K}{4} = 4.68 \quad (3.33)$$

in končna oblika prehitevalnega kompenzacijskega regulatorja

$$G_K(s) = 4.68 \frac{s + 2.9}{s + 5.4} \quad (3.34)$$

Slika 3.15 prikazuje ustrezno realizacijo z elektronskimi komponentami.



Slika 3.15: Elektronski prehitevalni kompenzator

Z upoštevanjem enačbe (3.4) in ustreznih vrednosti elektronskih komponent dobimo izračunani kompenzator.

Potem, ko smo načrtali kompenzator, je potrebno preveriti, ali smo res dosegli predpisane zahteve. Čeprav zahtev za konstanto hitrostnega pogreška nismo podali, jo vseeno izračunajmo

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_K(s)G(s) = 5.02s^{-1} \quad (3.35)$$

Torej smo to konstanto povečali, kar pomeni, da bo pogrešek v ustaljenem stanju kompenziranega sistema manjši, kot pri nekompenziranem sistemu. Preverimo še, ali sta dosežena pola res dominantna, torej če sta  $\zeta$  in  $\omega_n$  pravi merili za vrednotenje prehodnega pojava. Zaprtizančni kompenzirani sistem je 3. reda in karakteristična enačba je

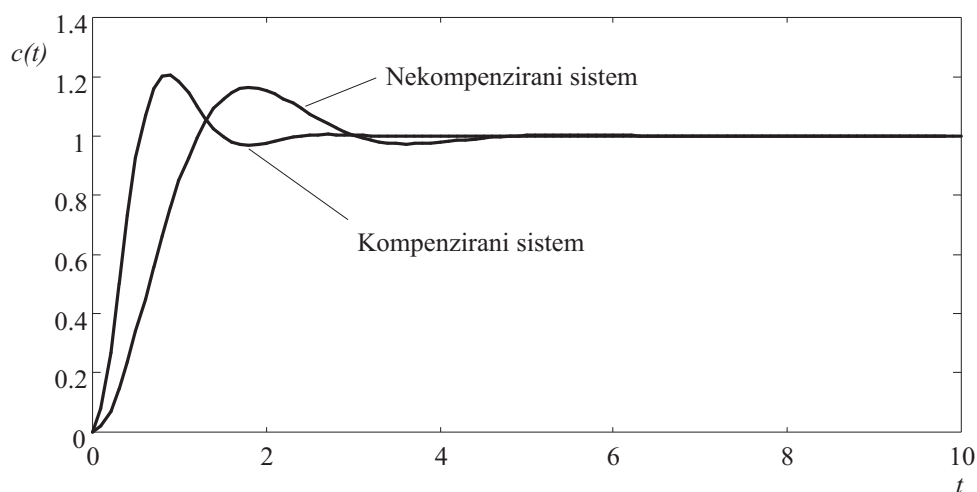
$$(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 3.4) = 0 \quad (3.36)$$

Tretji pol je torej pri  $s = -3.4$  in ni preveč oddaljen od dominantnega para. Vendar je ta pol precej blizu odprtozančne in hkrati zaprtizančne ničle pri  $s = -2.9$ , tako da je njegov vpliv na prehodni pojav majhen. Zato lahko zaključimo, da kompenzacija deluje v redu.

Slika 3.16 prikazuje odziva nekompenziranega in kompenziranega sistema na stopničasto spremembo reference. Kompenzirani sistem ima kljub enakemu dušilnemu koeficientu  $\zeta$  nekoliko večji prevzpon, saj je ničla (pri  $s = -2.9$ ) nekoliko bližje koordinatnemu izhodišču kot pol (pri  $s = -3.4$ ).

Ustrezno delovanje kompenzatorja bi dosegli tudi v primeru, če bi izbrali ničlo pri  $s = -2$  in pol pri  $s = -4$ , saj tudi ta kombinacija zagotovi  $\lambda = 30^\circ$ . V tem primeru bi ničla kompenzatorja krajšala pol procesa, zato bi bil rezultančni regulacijski sistem 2. reda. Zaradi manjšega  $\alpha$  bi dosegli nekoliko slabše delovanje v ustaljenem stanju ( $K_v = 4s^{-1}$ ). Z različnimi kombinacijami polov in ničel je torej možno do neke mere upoštevati tudi zahteve za  $K_v$ . Za strožje zahteve (velik  $K_v$ ) pa je potrebno dodati zakasnilni kompenzator.

□



Slika 3.16: Odziva nekompenziranega in kompenziranega sistema na stopničasto spremembo reference

### 3.2.3 Prehitevalna kompenzacija s pomočjo Bodejevega diagrama

Bodejev diagram uporabimo, če so podane naslednje zahteve:

- konstanta pogreška,
- fazni razložek,
- ojačevalni razložek,
- pasovna širina,
- resonančni vrh.

Shema za ustrezno kompenzacijo je enaka kot na sliki 3.10. Osnovna ideja je razvidna iz slike 3.1 z ustrezno razlago prehitevalne kompenzacije. Postopek lahko opišemo v naslednjih točkah:

#### 1. Kompenzator<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Predpostavimo prehitevalni kompenzator, čeprav se bo to izkazalo šele pod točko 4.

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.37)$$

zapišemo ob upoštevanju  $K_K \alpha = K$  v obliko, primerno za Bodejevo analizo

$$G_K(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad (3.38)$$

Zato je odprtozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema

$$G_K(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} KG(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_1(s) \quad (3.39)$$

pri čemer je

$$G_1(s) = KG(s) \quad (3.40)$$

Tako spremenjeni kompenzator  $\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$  ima ojačenje 1.

2. Določimo konstanto  $K$  tako, da so izpolnjene zahteve v ustaljenem stanju (konstante pogreška).
3. S tako določenim  $K$  narišemo Bodejev diagram nekompenziranega sistema  $G_1(s)$  in iz njega določimo fazni razložek.
4. Če je fazni razložek premajhen, moramo uporabiti prehitevalni kompenzator. Določiti moramo, kakšno fazno prehitevanje  $\Phi_{max}$  moramo dodati v zanko. Pri tem je potrebno upoštevati, da mora biti ta kot nekoliko večji od izračunanega, saj ustrezno definirani prehitevalni kompenzator (ki ima ojačenje 0dB pri nizkih frekvencah) povzroči ojačenje pri visokih frekvencah, zato se  $\omega_1$  pomakne v desno, kar zmanjšuje fazni razložek.
5. S pomočjo enačbe

$$\sin \Phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (3.41)$$

določimo razmerje med ničlo in polom  $\alpha$ , ki omogoča fazno prehitevanje  $\Phi_{max}$ . Ker ima kompenzator maksimum pri

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \quad (3.42)$$

vnaša pri tej frekvenci ojačenje

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T} \right|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.43)$$

Zato moramo  $\omega_{max}$  izbrati tako, da bo pri tej frekvenci

$$20 \log |G_1(j\omega_{max})| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.44)$$

kar pomeni, da bo  $\omega_{max}$  frekvenca, kjer bo absolutna vrednost kompenziranega sistema 0dB.

6. Iz enačbe  $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$  določimo pri predhodno izračunanih  $\omega_{max}$  in  $\alpha$  konstanto  $T$  in tako imamo

$$\begin{aligned} \text{ničlo pri } s &= -\frac{1}{T} \\ \text{in pol pri } s &= -\frac{1}{\alpha T} \end{aligned}$$

7. Končno določimo še ojačenje kompenzatorja

$$K_K = \frac{K}{\alpha} \quad (3.45)$$

8. Iz Bodejevega diagrama kompenziranega sistema preverimo, če so izpolnjene vse zahteve. Če niso, je potrebno postopek ponoviti.

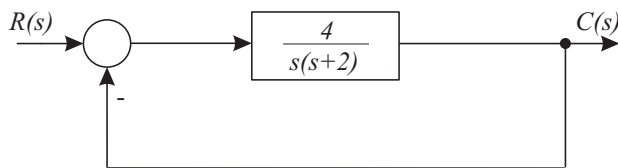
**Primer 3.2** Regulacijski sistem, ki ga prikazuje slika 3.17, želimo kompenzirati tako, da bo konstanta hitrostnega pogreška

$$K_v = 20s^{-1} \quad (3.46)$$

fazni in ojačevalni razložek pa vsaj

$$\Phi_m = 50^0 \quad K_m = 10\text{dB} \quad (3.47)$$

Ob predpostavki, da potrebujemo prehitevalni kompenzator



Slika 3.17: Regulacijski sistem

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad (3.48)$$

definiramo

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{4K}{s(s+2)} \quad (3.49)$$

Nato določimo konstanto  $K$ , da izpolnimo pogoj za  $K_v$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_K(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = 2K = 20 \quad (3.50)$$

$$K = 10 \quad (3.51)$$

Nato narišemo Bodejev diagram

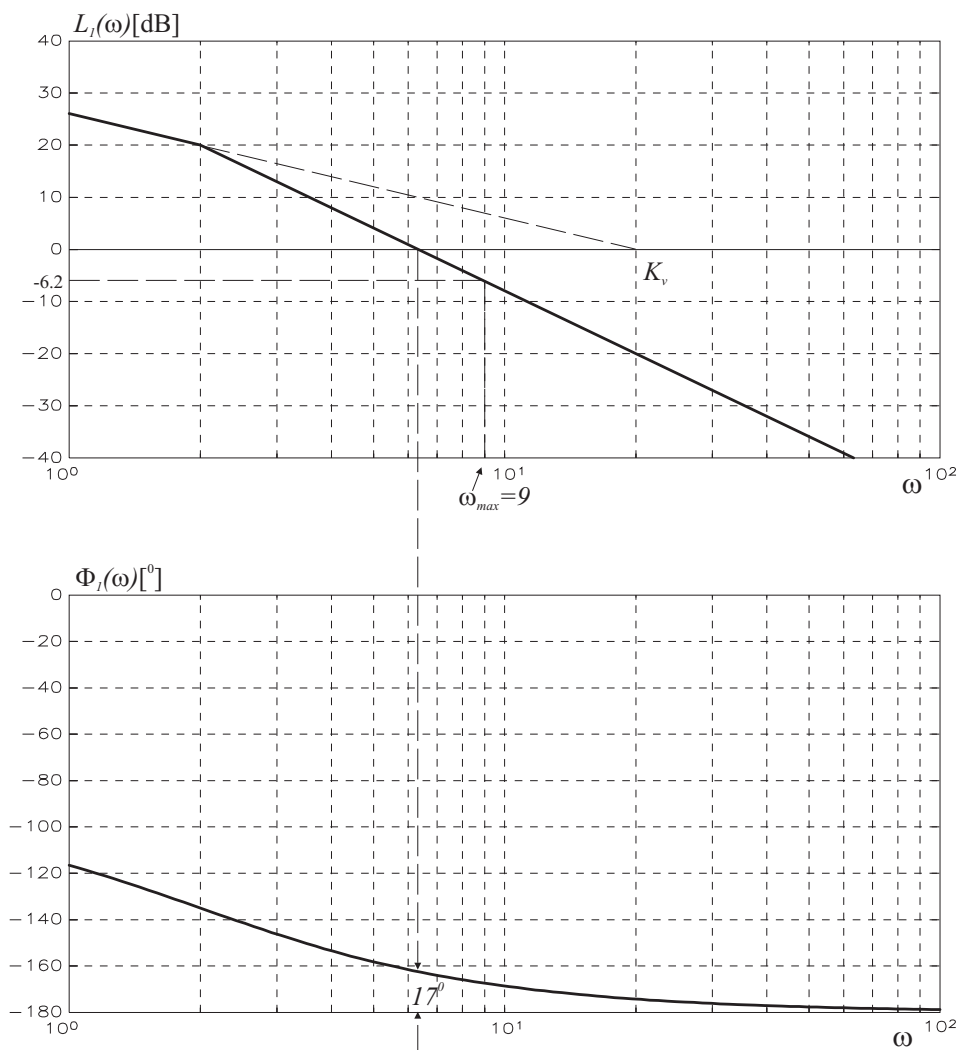
$$G_1(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega + 1)} \quad (3.52)$$

Le-tega prikazuje slika 3.18

Iz slike vidimo, da je fazni razložek  $\Phi_m = 17^\circ$  in ojačevalni razložek  $K_m = \infty$ . Torej je fazni razložek premajhen in sistem je preveč oscilatoren. Zato je potrebno dodati fazno prehitevanje. Ker je fazni razložek "premajhen" za  $33^\circ$ , izberemo tak kompenzator, ki uvaža nekoliko večje prehitevanje (dodamo npr.  $5^\circ$ )

$$\Phi_{max} = 38^\circ \quad (3.53)$$



Slika 3.18: Bodejev diagram  $G_1(j\omega)$ 

Iz enačbe

$$\sin \Phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (3.54)$$

določimo

$$\alpha = 0.24 \quad (3.55)$$

Iz znanega  $\alpha$  določimo frekvenco  $\omega_{max}$ , ki zadošča enačbi

$$20 \log |G_1(j\omega_{max})| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -6.2 \text{dB} \quad (3.56)$$

Iz Bodejevega diagrama sistema  $G_1(j\omega)$  vidimo, da je to frekvenca

$$\omega_{max} = 9 \text{rds}^{-1} \quad (3.57)$$

Iz enačbe  $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$  določimo

$$T = 0.227 \quad (3.58)$$

torej je ničla kompenzatorja pri

$$s = -\frac{1}{T} = -4.41 \quad (3.59)$$

in pol pri

$$s = -\frac{1}{\alpha T} = -18.4 \quad (3.60)$$

Ojačenje kompenzatorja je

$$K_K = \frac{K}{\alpha} = 41.7 \quad (3.61)$$

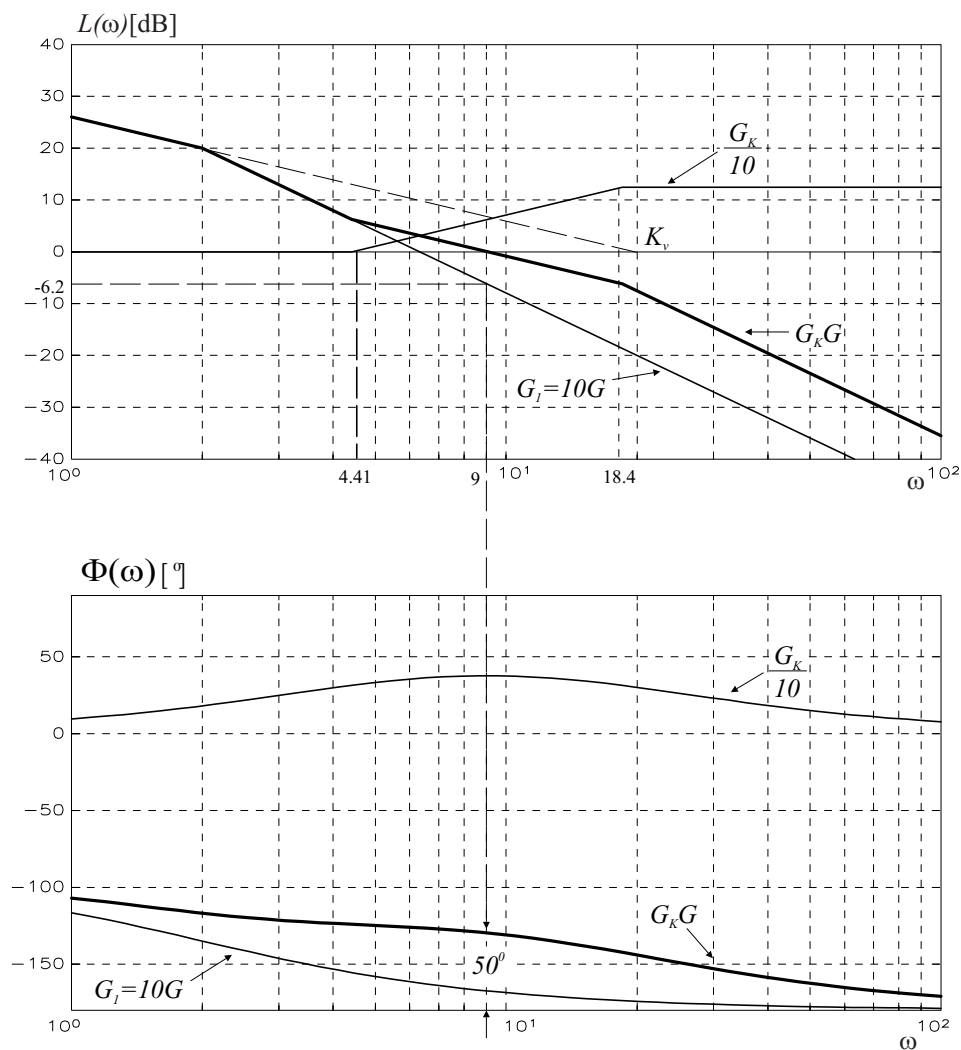
prenosna funkcija pa

$$G_K(s) = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = 10 \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1} \quad (3.62)$$

V Bodejevem diagramu obravnavamo sistema  $G_1(s) = 10G(s)$  in kompenzator  $\frac{G_K(s)}{10}$  (ojačenje 0dB pri nizkih frekvencah), tako da je odprtozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema

$$\frac{G_K(s)}{10} 10G(s) = G_K(s)G(s) \quad (3.63)$$

Slika 3.19 prikazuje Bodejev diagram kompenziranega sistema.

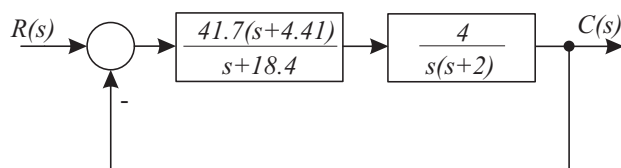


Slika 3.19: Bodejev diagram kompenziranega sistema

Slika 3.20 pa prikazuje bločni diagram kompenziranega regulacijskega sistema.

Iz slike 3.19 vidimo, da je

$$\begin{aligned} K_v &= 20 \\ \Phi_m &= 50^\circ \end{aligned}$$

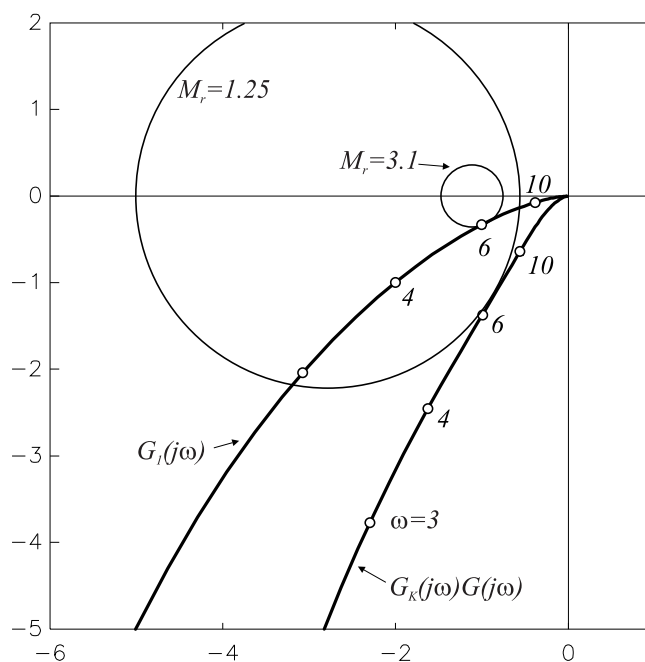


Slika 3.20: Bločni diagram kompenziranega regulacijskega sistema

$$K_m = \infty$$

torej smo izpolnili vse zahteve. Ker smo frekvenco  $\omega_1$  premaknili v desno, je sistem postal hitrejši.

Slika 3.21 prikazuje polarni diagram nekompenziranega sistema  $G_1(j\omega)$ <sup>6</sup> in kompenziranega sistema  $G_K(j\omega)G(j\omega)$ .

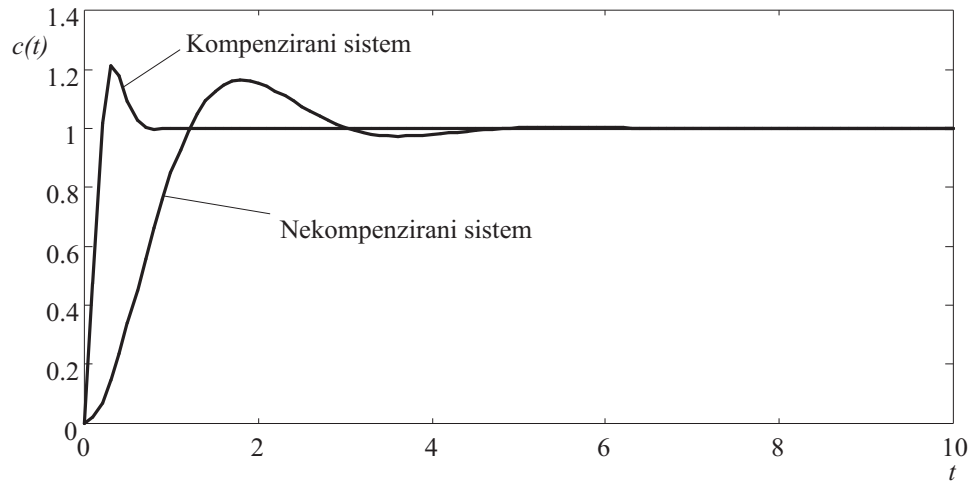
Slika 3.21: Polarni diagram  $G_1(j\omega)$  in  $G_K(j\omega)G(j\omega)$ 

Iz polarnih diagramov vidimo, da je resonančna frekvenca zaprtozančnega nekompenziranega sistema (slika 3.17) približno  $\omega_r \doteq 6 \text{ rds}^{-1}$ , pri kompenziranem sistemu (slika 3.20) pa je  $\omega_r \doteq 7 \text{ rds}^{-1}$ , kar pomeni, da smo razširili tudi pasovno

<sup>6</sup>To je že delno kopmenzirani sistem (z ojačenjem)

širino zaprtozančnega sistema. Prav tako se je resonančni vrh zmanjšal iz  $M_r = 3.1$  na  $M_r = 1.25$ , kar tudi kaže na povečano relativno stabilnost.

Slika 3.22 prikazuje odziva nekompenziranega in kompenziranega sistema na stopničasto spremembo reference. Na prvi pogled se zdi, da nismo povečali faznega razločka, saj sta prevzpona približno enaka. Vendar smo s kompenzacijo izdatno povečali tudi  $k_v$ , tako da sta se učinka povečanega  $\Phi_m$  in povečanega  $k_v$  na prevzpon izničila.



Slika 3.22: Odziva nekompenziranega in kompenziranega sistema na stopničasto spremembo reference

□

### 3.2.4 PD regulator

*PD* regulator

$$G_R(s) = K_P(1 + T_D s) \quad (3.64)$$

je posebna oblika prehitevalnega kompenzacijskega regulatorja, kjer je ničla pri  $s = -\frac{1}{T_D}$  in pol pri  $s = -\infty$ .  $K_P$  določimo tako, da dosežemo ustrezne razmere v ustaljenem stanju,  $T_D$  pa tako, da dobimo ustrezen fazni razloček. Vendar *PD* regulator ojačuje visoke frekvence, kar običajno v regulacijskih sistemih ni

zaželeno. Zaradi teh slabosti in pa zato, ker idealnega  $PD$  regulatorja niti ni možno realizirati, uporabljamo v praksi za  $PD$  regulator prenosno funkcijo

$$G_R(s) = K_P \left( 1 + \frac{T_D s}{T' s + 1} \right) \quad (3.65)$$

oz.

$$G_R(s) = K_P \frac{(T_D + T')s + 1}{T' s + 1} \quad (3.66)$$

Ker je običajno  $T' = (0.1 \text{ do } 0.3)T_D$ , je enačba (3.66) prehitevalnega kompenzatorja z ničlo pri  $s = -\frac{1}{T_D + T'} \doteq -\frac{1}{T_D}$  in polom pri  $s = -\frac{1}{T'}$  ( $\alpha = \frac{T'}{T_D}$ ). Torej ni med tako definiranim  $PD$  regulatorjem in prehitevalnim kompenzatorjem nobene razlike. Vse, kar velja za načrtovanje prehitevalnih kompenzatorjev, velja za načrtovanje  $PD$  regulatorjev in obratno. Gre pravzaprav za razliko med  $PD$  regulatorji in prehitevalnimi kompenzatorji v smislu načrtovalnega postopka: načrtovanje  $PD$  regulatorja je bolj vezano na časovni prostor, načrtovanje prehitevalnega kompenzatorja pa na frekvenčni prostor.

## 3.3 Zakasnilna kompenzacija

### 3.3.1 Zakasnilni kompenzacijski regulator

Enačba 3.4 predstavlja *zakasnilni kompenzacijski regulator*, če velja  $R_1 C_1 < R_2 C_2$ . V splošni obliki ga podaja izraz

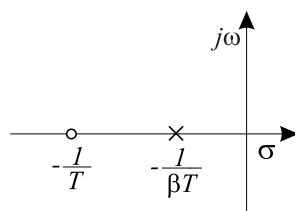
$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad \beta > 1 \quad (3.67)$$

V primeru elektronskega regulatorja je

$$\beta = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \quad K_K = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \quad (3.68)$$

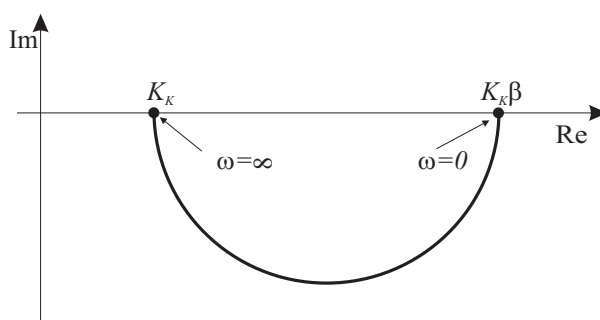
Zakasnilni kompenzator ima ničlo pri  $s = -\frac{1}{T}$  in pol pri  $s = -\frac{1}{\beta T}$ , torej je pol desno od ničle oziroma bliže koordinatnemu izhodišču. Zato ima pol odločilnejši

vpliv, torej zakasnilni kompenzator premakne DLK v desno. Ustrezno lego pola in ničle prikazuje slika 3.23.  $\beta$  je torej razmerje med lego ničle in lego pola.



Slika 3.23: Pol in ničla pri zakasnilnem kompenzatorju

Slika 3.24 prikazuje polarni diagram zakasnilnega kompenzatorja.



Slika 3.24: Polarni diagram zakasnilnega kompenzatorja

Vidimo, da je fazni kot v celotnem frekvenčnem področju negativen, torej kompenzator v zanko uvaja fazno zaostajanje. Slika 3.25 prikazuje Bodejeve diagrame za  $K_K = 1$  pri različnih vrednostih  $\beta$ .

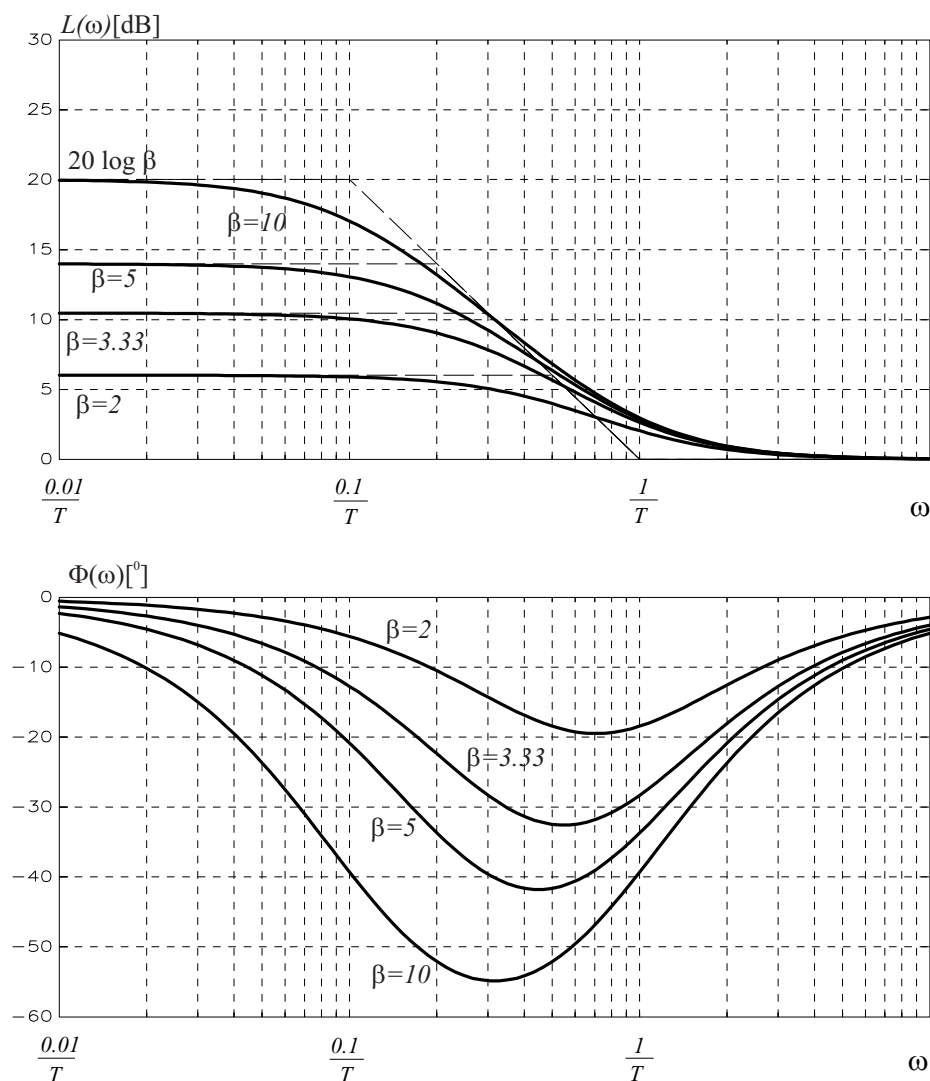
Torej je zakasnilni kompenzator nizkopasovni filter.

### 3.3.2 Zakasnilna kompenzacija s pomočjo diagrama lege korenov

Zakasnilno kompenzacijo s pomočjo DLK lahko uporabimo v primeru, če ima regulacijski sistem že ustrezen prehodni pojav in želimo izboljšati le razmere v ustaljenem stanju. To dosežemo tako, da povečamo le ojačenje,<sup>7</sup> medtem ko frekvenčne karakteristike ne spreminjamo pri višjih frekvencah.<sup>8</sup> Slika 3.25 potr-

<sup>7</sup>Povečamo absolutno vrednost frekvenčne karakteristike pri nizkih frekvencah

<sup>8</sup>To področje določa prehodni pojav pri hitro se spreminjajočih vhodnih signalih



Slika 3.25: Bodejev diagram zakasnilnega kompenzatorja pri  $K_K = 1$  in  $\beta = 10, 5, 3.33, 2$

juje, da je v ta namen primeren zakasnilni kompenzator.

Da v načrtovalnem postopku bistveno ne spremenimo DLK (oz. prehodni pojav) nekompenziranega sistema, morata biti pol in ničla kompenzatorja čim bliže skupaj.<sup>9</sup> Hkrati pa mora kompenzator ojačevati le pri nizkih frekvencah. Ker je tam ojačenje

<sup>9</sup>Če sta v isti točki, se pokrajšata in seveda ne spremenita DLK



$$L(\omega) = 20 \log \beta \quad (3.69)$$

mora biti  $\beta$  tako velik, da so izpolnjene zahteve za ustaljeno delovanje. Oba pogoja lahko hkrati zadovoljimo le, če sta pol in ničla čim bliže koordinatnemu izhodišču.

Postopek načrtovanja lahko opišemo v naslednjih točkah:

1. Prepričamo se, ali je prehodni pojav zadovoljiv. Če ni, je potrebno razmišljati o predkompenzatorju, ki to zagotovi.<sup>10</sup>
2. Narišemo DLK nekompenziranega sistema  $G(s)$  in na njem določimo dominantne korene.
3. Izračunamo konstanto pogreška nekompenziranega sistema  $G(s)$  in če je le ta premajhna, izračunamo, kolikokrat jo je treba povečati. To lahko opravimo z pomočjo konstante  $\beta$  zakasnilnega kompenzatorja

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (3.70)$$

Odpertozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema je torej  $G_K(s)G(s)$ .

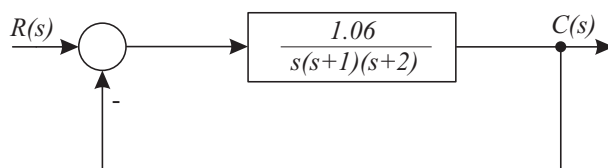
4. Določimo lego pola in ničle kompenzatorja, tako da ustrezno povečamo konstanto pogreška (za faktor  $\beta$ ) in pri tem minimalno spremenimo DLK. To dosežemo s polom in ničlo, ki sta blizu koordinatnega izhodišča.
5. Narišemo DLK tako kompenziranega sistema. Če je fazni prispevek zakasnilnega kompenzacijskega regulatorja zadosti majhen (do  $5^\circ$ ), potem se DLK kompenziranega in nekompenziranega sistema malo razlikujeta. Sprememba ojačenja, ki jo kompenzator vnaša dominantnemu paru polov ni pomembna, saj bomo to lahko popravili z ustreznim  $K_K$ .
6. Na DLK kompenziranega sistema določimo lego zelenih korenov. To običajno določimo tako, da povežemo korene nekompenziranega sistema s koordinatnim izhodiščem. Presečišča s kompenziranim DLK so novi zeleni koreni (ohranimo  $\zeta$ ).

---

<sup>10</sup>Običajno prehitevalna kompenzacija, ki pomakne DLK proti levi

7. Iz pogoja absolutne vrednosti za DLK kompenziranega sistema določimo  $K_K$  tako, da bosta dominantna pola zaprtostančnega sistema res v želeni točki.

**Primer 3.3** Nekompenzirani regulacijski sistem z ustreznim prehodnim pojavom prikazuje slika 3.26.



Slika 3.26: Bločni diagram nekompenziranega sistema

Želimo doseči konstanto pogreška približno

$$K_v = 5s^{-1} \quad (3.71)$$

ne da bi pri tem bistveno spremenili prehodni pojav.

Zaprtozančna prenosna funkcija regulacijskega sistema je

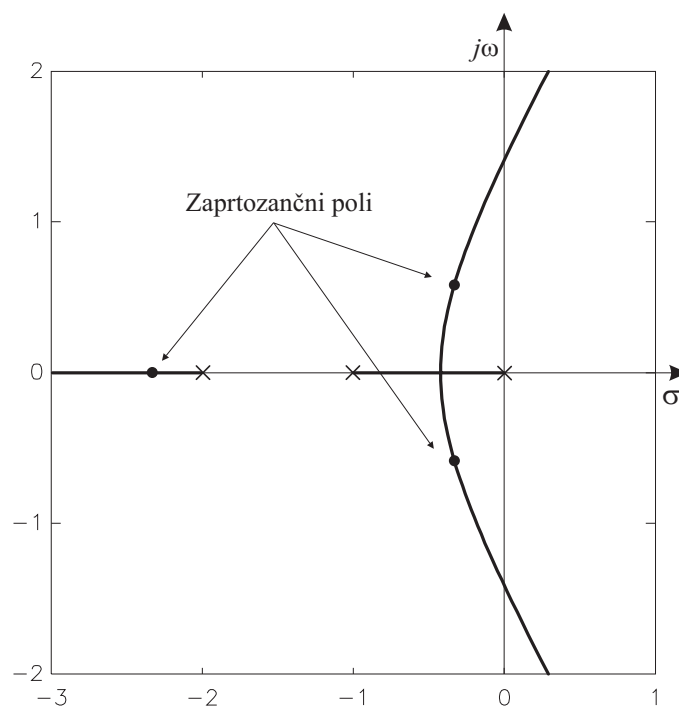
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2) + 1.06} = \frac{1.06}{(s+0.33-j0.58)(s+0.33+j0.58)(s+2.33)} \quad (3.72)$$

Dominantna korena sta torej

$$s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58 \quad (3.73)$$

Slika 3.27 prikazuje DLK nekompenziranega sistema.

Dominantni par korenov določa dušilni koeficient  $\zeta = 0.5$  in lastna frekvenca  $\omega_n = 0.67 \text{ rad/s}$ . Konstanta hitrostnega pogreška je



Slika 3.27: DLK nekompenziranega sistema

$$K_v = 0.53s^{-1} \quad (3.74)$$

Da dosežemo ustrezno konstanto hitrostnega pogreška, moramo pri nizkih frekvencah v zanko vnesti ojačenje približno 10. Zato izberemo

$$\beta = 10 \quad (3.75)$$

To dosežemo s polom pri

$$s = -0.01 \quad (3.76)$$

in ničlo pri

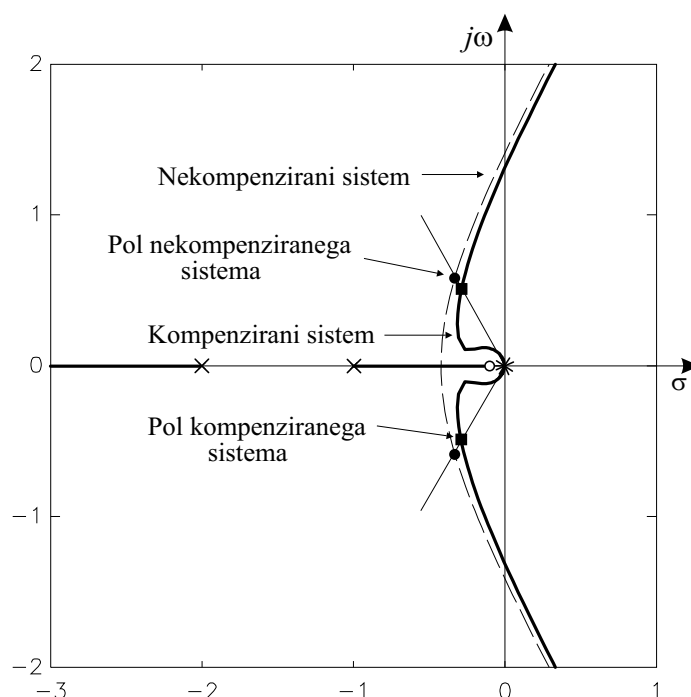
$$s = -0.1 \quad (3.77)$$

Nekateri avtorji priporočajo, da lego ničle določimo tako, da v dominantnem polu odmerimo kot  $5^\circ - 10^\circ$  od linije  $\zeta = \text{konst}$ , ki gre skozi koordinatno izhodišče in dominanten pol.

Prenosna funkcija zakasnilnega kompenzatorja je torej

$$G_K(s) = K_K \frac{s + 0.1}{s + 0.01} \quad (3.78)$$

Kotni prispevek tega kompenzatorja v dominantnem polu je  $7.2^\circ$ , kar je nekje na zgornji meji dovoljenega. Slika 3.28 prikazuje DLK kompenziranega in nekompenziranega sistema.



Slika 3.28: DLK kompenziranega in nekompenziranega sistema

Odprtozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema je

$$G_K(s)G(s) = K_K \frac{s + 0.1}{s + 0.01} \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{K(s + 0.1)}{s(s + 0.01)(s + 1)(s + 2)} \quad (3.79)$$

$$K = 1.06K_K \quad (3.80)$$

Dominantna pola kompenziranega sistema izberimo tako, da se  $\zeta$  glede na pole nekompenziranega sistema ne spremeni. Iz DLK na sliki 3.28 odčitamo ali kako drugače izračunamo nova želena pola

$$s_{1,2} = -0.287 \pm j0.513 \quad (3.81)$$

ki jih dosežemo, če je izpolnjen pogoj absolutne vrednosti. Potrebno ojačanje  $K$  je

$$K = \left| \frac{s(s+0.01)(s+1)(s+2)}{s+0.1} \right|_{s=-0.287+j0.513} = 0.93 \quad (3.82)$$

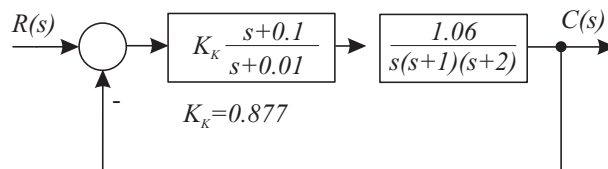
Ojačenje kompenzatorja je torej

$$K_K = \frac{K}{1.06} = \frac{0.93}{1.06} = 0.877 \quad (3.83)$$

Prenosna funkcija kompenzatorja je torej

$$G_K(s) = 0.877 \frac{s+0.1}{s+0.01} \quad (3.84)$$

Kompenzirani regulacijski sistem prikazuje slika 3.29.



Slika 3.29: Bločni diagram kompenziranega regulacijskega sistema

S tem smo dosegli konstanto hitrostnega pogreška

$$K_v = 4.65 s^{-1} \quad (3.85)$$

kar ustreza našim zahtevam. Če bi želeli doseči  $K_v = 5$ , bi morali vzeti  $K_K = 0.877 \frac{5}{4.65} = 0.943$ , kar pa bi povzročilo majhno zmanjšanje dušilnega koeficienta  $\zeta$ .

Zakasnilni kompenzator poviša red zaprtozančnega sistema iz tri na štiri. Analiza pokaže, da sta razen dominantnega para še dva realna pola

$$s_3 = -2.312 \quad \text{in} \quad s_4 = -0.1273 \quad (3.86)$$

Pol pri  $s = -2.312$  je precej oddaljen in ima relativno majhen vpliv. Pol pri  $s = -0.1273$  pa je blizu koordinatnega izhodišča, a je v njegovi bližini odprtozančna (in zaprtozančna) ničla pri  $s = -0.1$ , zato je tudi njegov učinek zanemarljiv. Torej ima kompenzirani sistem zelo podoben prehodni pojav kot nekompenzirani sistem.

Lastna frekvenca  $\omega_n$  se je zmanjšala za približno 13%, od  $0.67 \text{ rds}^{-1}$  na  $0.58 \text{ rds}^{-1}$ . Torej je prehodni pojav kompenziranega sistema nekoliko počasnejši.  $\square$

### 3.3.3 Zakasnilna kompenzacija s pomočjo Bodejevega diagrama

Osnovni princip načrtovanja zakasnilnega kompenzatorja v Bodejevem diagramu je v tem, da z dušenjem ojačevalne karakteristike pri srednjih in visokih frekvencah dosežemo ustrezni fazni razloček. Fazna karakteristika je v samem postopku manj pomembna. Postopek je razviden tudi iz slike 3.1. Podoben učinek dosežemo tudi s prehitevalnim kompenzatorjem, če ga načrtamo tako, da pri srednjih in visokih frekvencah uvede fazno prehitevanje in zanemarljivo spremeni ojačevalno karakteristiko (3.2).

Postopek lahko opišemo v naslednjih točkah:

1. Ob predpostavki, da potrebujemo zakasnilni kompenzator

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = K_K \beta \frac{T s + 1}{\beta T s + 1} \quad \beta > 1 \quad (3.87)$$

definiramo

$$K = K_K \beta \quad (3.88)$$

Torej je kompenzator

$$G_K(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \quad (3.89)$$

Odpertožančna prenosna funkcija kompenziranega sistema je

$$G_K(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} KG(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G_1(s) \quad (3.90)$$

kjer je

$$G_1(s) = KG(s) \quad (3.91)$$

2. Določimo  $K$  tako, da je izpolnjen pogoj za določeno konstanto pogreška.
3. Narišemo Bodejev diagram  $G_1(j\omega)$ .
4. Če ima nekompenzirani sistem premajhen fazni oz. ojačevalni razložek, določimo frekvenco  $\omega_1$ , pri kateri ima odpertožančna nekompenzirana prenosna funkcija fazni kot

$$\angle[G_1(j\omega_1)] = -180^\circ + \Phi_m + (5^\circ \text{ do } 12^\circ) \quad (3.92)$$

$\Phi_m$  je želeni fazni razložek.  $5^\circ$  do  $12^\circ$  dodamo zato, ker bo približno tako zakasnitev uvedel pri frekvenci  $\omega_1$  zakasnilni kompenzator. Frekvenca  $\omega_1$  je frekvenca, pri kateri naj bi absolutna vrednost kompenziranega sistema sekala os 0dB.

5. Da fazna karakteristika zakasnilnega kompenzatorja čim manj vpliva na fazo kompenziranega sistema v bližini frekvence  $\omega_1$ , moramo pol in ničlo kompenzatorja izbrati tako, da so ustrezne lomne frekvence v dovolj nizkem frekvenčnem področju. Nekateri avtorji priporočajo, da izberemo lomno frekvenco ničle kompenzatorja štiri oktave nižjo od frekvence  $\omega_1$  ( $\frac{\omega_1}{16}$ ), nekateri pa priporočajo eno oktavo do eno dekada nižjo ( $\frac{\omega_1}{2}$  do  $\frac{\omega_1}{10}$ ).
6. Določimo, kakšno dušenje mora vnesti kompenzator, da postane absolutna vrednost kompenziranega sistema pri  $\omega = \omega_1$  0dB. Ta vrednost je enaka

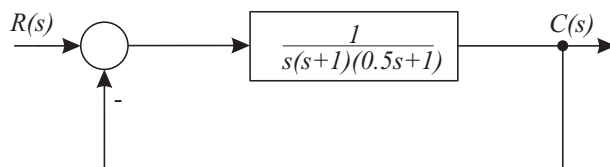
$$20 \log |G_1(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = 20 \log \beta \quad (3.93)$$

iz česar določimo vrednost  $\beta$ .

7. Ničlo smo že izbrali pod točko 5, na podlagi  $\beta$  pa določimo še pol.
8. Iz  $K$ , ki smo ga določili v točki 2 in  $\beta$ , ki smo ga določili v točki 6, določimo tudi ojačenje kompenzatorja

$$K_K = \frac{K}{\beta} \quad (3.94)$$

**Primer 3.4** Slika 3.30 prikazuje bločni diagram nekompenziranega regulacijskega sistema.



Slika 3.30: Bločni diagram nekompenziranega regulacijskega sistema

Z ustrezno kompenzacijo želimo doseči konstanto hitrostnega pogreška  $K_v = 5s^{-1}$ , fazni razložek vsaj  $\Phi_m = 40^\circ$  in ojačevalni razložek vsaj  $K_m = 10$  dB.

Uporabili bomo zakasnilni kompenzator

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = K_K \beta \frac{T s + 1}{\beta T s + 1} \quad \beta > 1 \quad (3.95)$$

Definirajmo

$$K_K \beta = K \quad (3.96)$$

in

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)} \quad (3.97)$$

Na začetku postopka je potrebno določiti ojačenje  $K$ , ki zagotovi konstanto hitrostnega pogreška  $K_v = 5s^{-1}$ .

Torej je konstanta  $K$



$$K = 5 \quad (3.98)$$

Z ustrezno izračunanim  $K$  narišemo Bodejev diagram nekompenziranega sistema

$$G_1(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)} \quad (3.99)$$

Le-tega prikazuje slika 3.31.

Vidimo, da ima nekompenzirani sistem  $G_1(j\omega)$  fazni razloček  $-20^\circ$ , kar pomeni, da je sistem nestabilen.

Nato določimo frekvenco  $\omega_1$ , pri kateri velja

$$\angle[G_1(j\omega_1)] = -180^\circ + \Phi_m + 12^\circ = -180^\circ + 40^\circ + 12^\circ = -128^\circ \quad (3.100)$$

Iz fazne karakteristike  $\angle[G_1(j\omega)]$  odčitamo

$$\omega_1 \doteq 0.5 \text{ rds}^{-1} \quad (3.101)$$

Nato izberemo ničlo prehitevalnega kompenzatorja. Le-ta mora biti tako izbrana, da je ustrezna lomna frekvenca precej oddaljena od  $\omega = \omega_1$ . Izberemo zato ničlo

$$s = -\frac{1}{T} = -0.1 \quad (3.102)$$

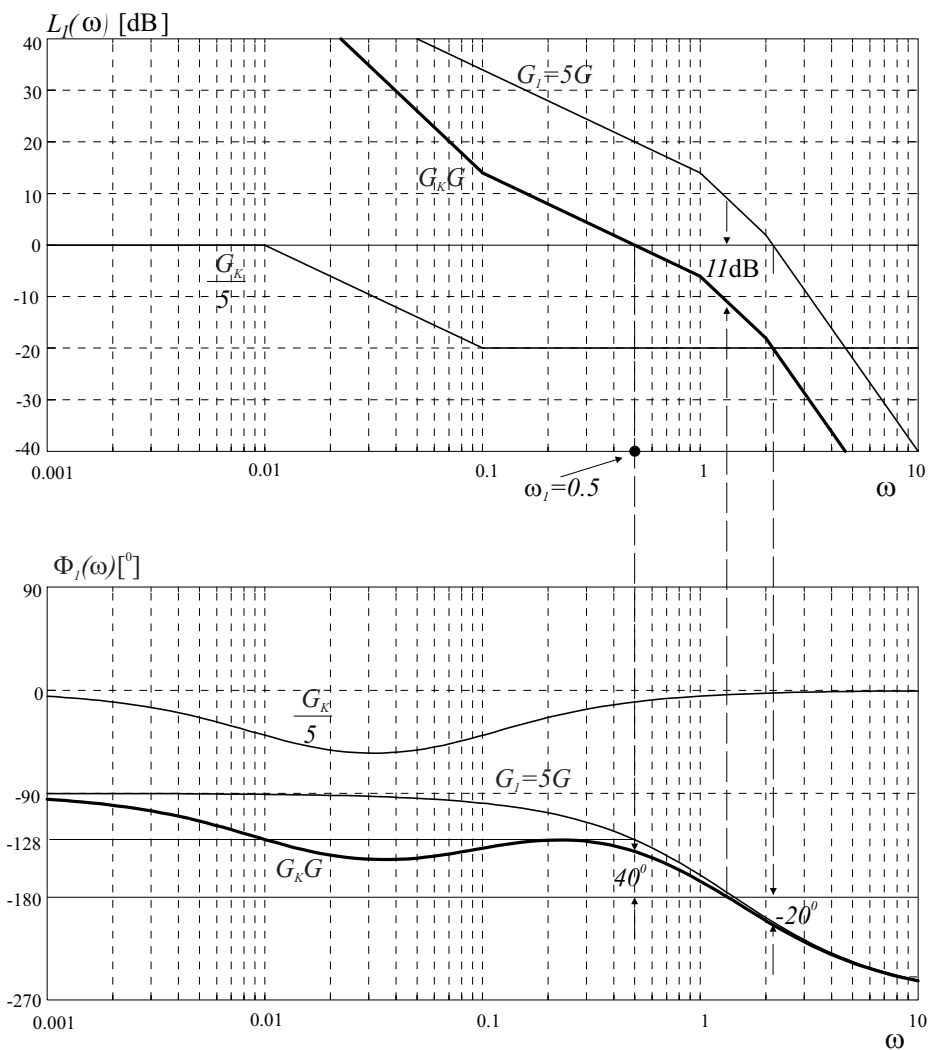
Ker lomna točka, ki pripada tej ničli, ni pretirano oddaljena od frekvence  $\omega = \omega_1$  (enačba 3.100), je opravičljivo, da smo pri računanju  $\omega_1$  upoštevali kot  $12^\circ$ .

Iz enačbe

$$20 \log |G_1(j\omega_1)| = 20 \text{ dB} = 20 \log \beta \quad (3.103)$$

določimo

$$\beta = 10 \quad (3.104)$$



Slika 3.31: Bodejev diagram nekompenziranega in kompenziranega sistema

Torej je pol kompenzatorja pri

$$s = -\frac{1}{\beta T} = -\frac{1}{10}0.1 = -0.01 \quad (3.105)$$

Ker velja

$$K_K = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{10} = 0.5 \quad (3.106)$$

je prenosna funkcija zakasnilnega kompenzatorja

$$G_K(s) = 0.5 \frac{s + 0.1}{s + 0.01} \quad (3.107)$$

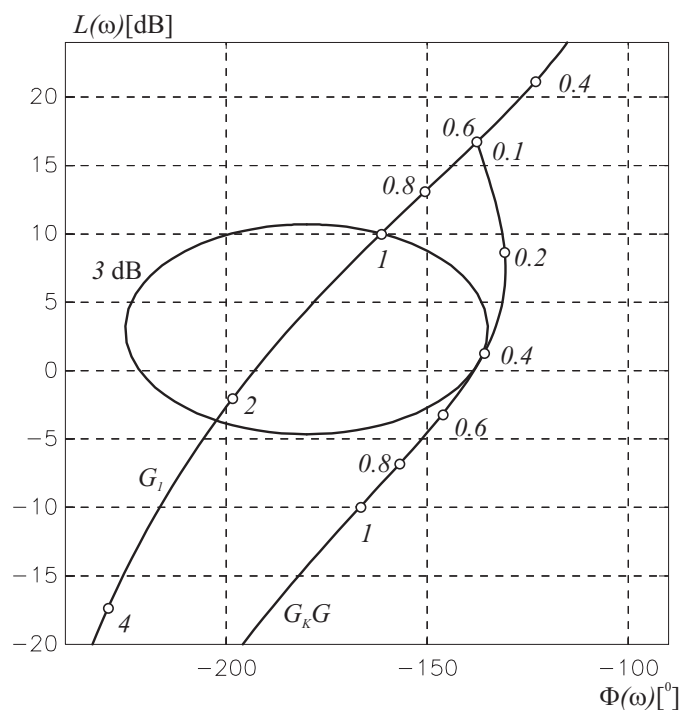
Slika 3.31 prikazuje tudi Bodejev diagram kompenziranega sistema. Ker smo pri načrtovanju uporabljali kompenzator z ojačenjem 1, smo ga na sliki 3.31 označili z  $\frac{G_K}{5}$ .

Fazni razložek kompenziranega sistema je  $40^\circ$ , kar smo tudi zahtevali. Tudi ojačevalni razložek  $K_m = 11\text{dB}$  je sprejemljiv. Konstanta hitrostnega pogreška pa je  $K_v = 5s^{-1}$ , kar smo pravtako zahtevali. Frekvenca, kjer absolutna vrednost seka  $0\text{dB}$  se je sicer znižala od  $2.1\text{rds}^{-1}$  na  $0.5\text{rds}^{-1}$ , kar pomeni, da se je zmanjšala pasovna širina. Sistem je zato postal nekoliko počasnejši, zato pa bolje izloča visokofrekvenčne motilne signale.

Slika 3.32 prikazuje  $G_1(j\omega)$  in  $G_K(j\omega)G(j\omega)$  v Nicholsovem diagramu. Vidimo, da ima zaprtozančni kompenzirani sistem resonančni vrh  $M_r = 3\text{dB}$  pri  $\omega_r \doteq 0.5\text{rds}^{-1}$ , medtem ko je nekompenzirani zaprtozančni sistem ( $\frac{G_1}{1+G_1}$ ) nestabilen.

□

Primeri 3.2 in 3.4 kažeta, kako je možno zahteve po ojačevalnem in faznem razločku izpolniti s prehitevalnim ali zakasnilnim kompenzatorjem. S pomočjo prehitevalnega kompenzatorja uvedemo fazno prehitevanje v srednjefrekvenčnem področju, z zakasnilnim kompenzatorjem pa vnesemo dušenje pri srednjih in visokih frekvencah. S tem se frekvenca  $\omega_1$  premakne v levo in ker fazne karakteristike pri teh frekvencah bistveno ne spreminjamo, se poveča relativna stabilnost. Seveda pa metodi nista ekvivalentni glede nekaterih drugih pokazateljev (npr. pasovna širina regulacijskega sistema).



Slika 3.32: Nicholsov diagram kompenziranega in nekompenziranega sistema

### 3.3.4 PI regulator

*PI* regulator s prenosno funkcijo

$$G_R(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = K_P \left( \frac{T_I s + 1}{T_I s} \right) \quad (3.108)$$

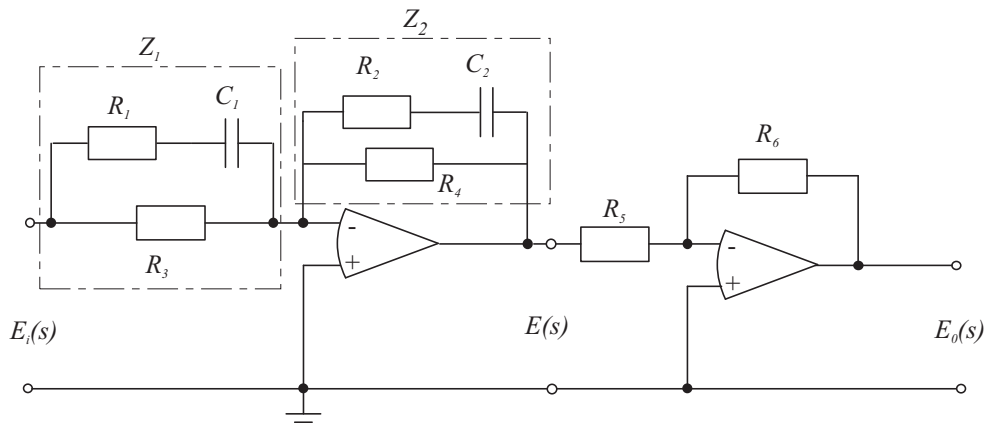
je posebni primer zakasnilnega kompenzatorja, ki ima ničlo pri  $s = -\frac{1}{T_I}$  in pol v koordinatnem izhodišču pri  $s = 0$ . Torej ima pri frekvenci  $\omega = 0$  neskončno ojačenje, kar zelo izboljša delovanje v ustaljenem stanju. Vendar s polom v koordinatnem izhodišču tudi povečamo vrsto sistema, zato postane zaprta zanka manj stabilna. Vrednosti  $K_P$  in  $T_I$  je torej potrebno skrbno izbrati. V splošnem *PI* regulator zmanjša hitrost prehodnega pojava, saj deluje kot filter, ki zmanjšuje pasovno širino.

## 3.4 Prehitevalno - zakasnilna kompenzacija

### 3.4.1 Prehitevalno-zakasnilni kompenzacijski regulator

Prehitevalna kompenzacija razširi pasovno širino, pohitri prehodni pojav in zmanjša maksimalni prevzpon pri stopničastem vzburjanju. Zakasnilna kompenzacija poveča ojačenje, s tem poveča natančnost v ustaljenem stanju, toda hkrati zaradi zmanjšane pasovne širine zmanjša hitrost v prehodnem pojavu.

Če želimo hkrati ustrezen prehodni pojav in ustaljeno delovanje, uporabimo *prehitevalno - zakasnilni kompenzator*. Za tak kompenzator je značilno, da v določenem frekvenčnem področju vnaša fazno prehitevanje, v določenem območju pa fazno zaostajanje. Ustrezno elektronsko realizacijo prikazuje slika 3.33.



Slika 3.33: Elektronski prehitevalno - zakasnilni kompenzacijski regulator

Ker so impedance

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(R_1 C_1 s + 1) R_3}{(R_1 + R_3) C_1 s + 1} \\ Z_2 &= \frac{(R_2 C_2 s + 1) R_4}{(R_2 + R_4) C_2 s + 1} \end{aligned} \quad (3.109)$$

je

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5} \left[ \frac{(R_1 + R_3) C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1} \right] \left[ \frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4) C_2 s + 1} \right] \quad (3.110)$$

Če definiramo

$$\begin{aligned} T_1 &= (R_1 + R_3)C_1 \\ \alpha T_1 &= R_1 C_1 \\ T_2 &= R_2 C_2 \\ \beta T_2 &= (R_2 + R_4)C_2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

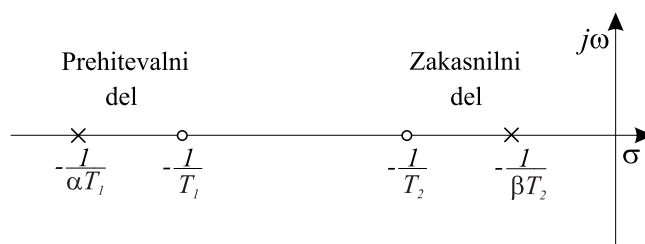
je

$$G_K(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_K \alpha \beta \left( \frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1} \right) \left( \frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) = K_K \frac{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})}{(s + \frac{1}{\alpha T_1})(s + \frac{1}{\beta T_2})} \quad (3.112)$$

pri čemer je

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_3} < 1 \quad \beta = \frac{R_2 + R_4}{R_2} > 1 \quad K_K = \frac{R_2 R_4 R_6}{R_1 R_3 R_5} \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4} \quad (3.113)$$

Enačba (3.112) opisuje prehitevalno - zakasnilni kompenzator. Lego polov in ničel prikazuje slika 3.34. Pol in ničla zakasnilnega kompenzatorja sta bliže koordinatnemu izhodišču. Često izberemo  $\frac{1}{\alpha} = \beta$ .

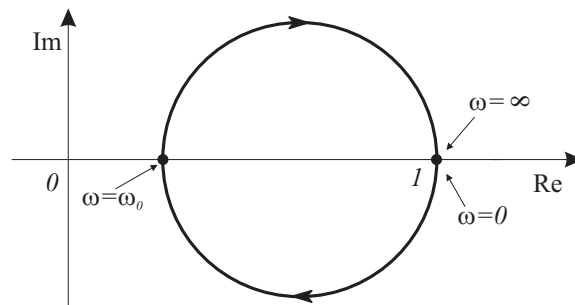


Slika 3.34: Lega polov in ničel prehitevalno - zakasnilnega kompenzatorja

Slika 3.35 prikazuje polarni diagram pri  $K_K = 1$  in  $\frac{1}{\alpha} = \beta$ .

Vidimo, da kompenzator deluje kot zakasnilni pri  $0 \leq \omega \leq \omega_0$  in kot prehitevalni za  $\omega_0 \leq \omega < \infty$ .  $\omega_0$  je frekvenca, pri kateri je fazni kot enak nič

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad (3.114)$$



Slika 3.35: Polarni diagram prehodevalno - zakasnilnega kompenzatorja

Slika 3.36 prikazuje Bodejev diagram prehodevalno - zakasnilnega kompenzatorja pri  $K_K = 1$ ,  $\frac{1}{\alpha} = \beta = 10$  in  $T_2 = 10T_1$ . Absolutna vrednost je enaka 0dB pri nizkih in visokih frekvencah

### 3.4.2 Prehodevalno - zakasnilna kompenzacija s pomočjo diagrama lege korenov

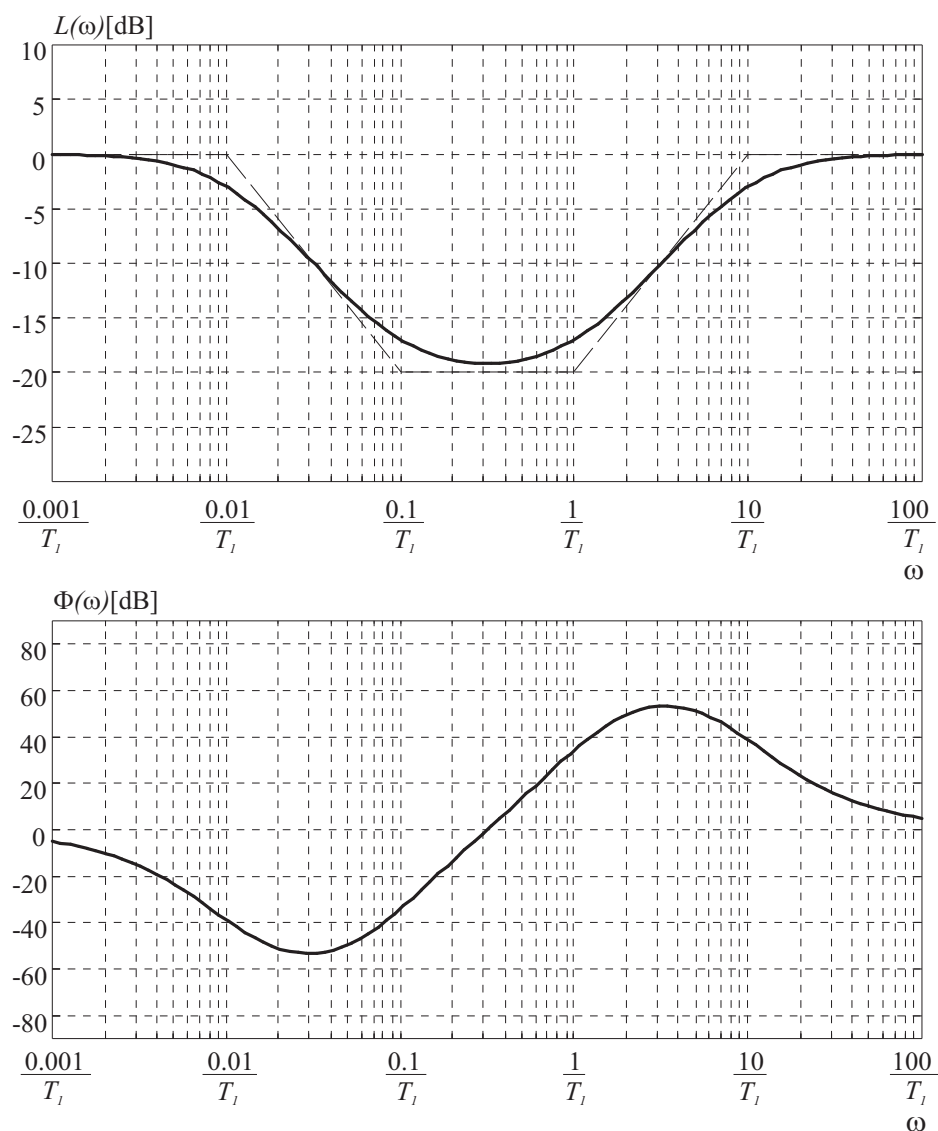
Pri načrtovanju prehodevalno - zakasnilnega kompenzatorja bomo omenili dva možna postopka:

- zahtevamo  $\frac{1}{\alpha} \neq \beta$
- zahtevamo  $\frac{1}{\alpha} = \beta$

#### Postopek pri $\frac{1}{\alpha} \neq \beta$

V tem primeru je postopek kombinacija obeh že obravnavanih postopkov za načrtovanje prehodevalnega in zakasnilnega kompenzatorja in ga lahko opišemo v naslednjih točkah:

1. Iz zahtev določimo lego dominantnih polov ( $s_{1,2}$ ).
2. Izračunamo kot  $\lambda$ , ki ga mora vnesti prehodevalni kompenzator, da poteka DLK skozi zelena pola. Pri tem predpostavimo, da bomo kasneje izbrali  $T_2$  zadosti velik, da bo prispevek zakasnilnega kompenzatorja po absolutni



Slika 3.36: Bodejev diagram prehitevalno - zakasnilnega kompenzatorja pri  $K_K = 1$ ,  $\frac{1}{\alpha} = \beta = 10$  in  $T_2 = 10T_1$

vrednosti in kotu majhen v zelenih polih. Prispevek prehitevalnega kompenzatorja mora torej biti

$$\angle \left[ \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{1}{\alpha T_1}} \right] = \lambda \quad (3.115)$$

Kot vemo, so pri tem možne različne izbire  $T_1$  in  $\alpha$ .



3. Določimo  $K_K$  iz pogoja absolutne vrednosti

$$\left| K_K \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{1}{\alpha T_1}} G(s_1) \right| = 1 \quad (3.116)$$

S tem smo izpolnili zahteve po ustrezni dinamiki prehodnega pojava. Naslednji koraki so namenjeni zagotovitvi ustreznega delovanja v ustaljenem stanju, t.j. načrtovanju zakasnilnega dela.

4. Iz zahtevane konstante pogreška določimo konstanto zakasnilnega kompenzatorja  $\beta$ .

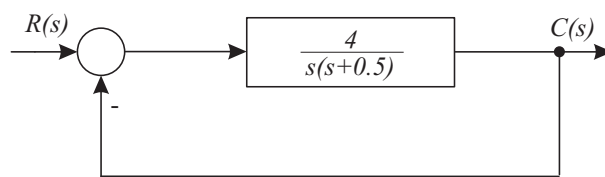
5. Po določeni konstanti  $\beta$  določimo  $T_2$  tako, da sta pol in ničla zakasnilnega kompenzatorja dovolj blizu koordinatnega izhodišča, tako da velja

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1 \quad (3.117)$$

$$-5^0 < \angle \left[ \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right] < 0^0 \quad (3.118)$$

Če sta izpolnjeni (ne)enačbi (3.117) in (3.118), se lega zelenih zaprtozančnih polov po vključitvi zakasnilnega dela le malo spremeni.

**Primer 3.5** Slika 3.37 prikazuje nekompenzirani regulacijski sistem.



Slika 3.37: Regulacijski sistem

Nekompenzirani sistem ima dušilni koeficient  $\zeta = 0.125$ ,  $\omega_n = 2 \text{ rds}^{-1}$ . Načrtati je potrebno prehitevalno - zakasnilni kompenzator, ki bo zagotovil naslednje pokazatelje:

$$\begin{array}{ll}
\text{dušilni koeficient} & \zeta = 0.5 \\
\text{lastna frekvenca} & \omega_n = 5 \text{ rad/s}^{-1} \\
\text{konstanta hitrostnega pogoška} & K_v = 80 \text{ s}^{-1}
\end{array}$$

Uporabili bomo prehitevalno - zakasnilni kompenzator

$$G_K(s) = K_K \left( \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\alpha T_1}} \right) \left( \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad \alpha < 1, \beta > 1 \quad (3.119)$$

Iz zahtev določimo lego zaprtozančnega dominantnega para

$$s_{1,2} = -2.5 \pm j4.33 \quad (3.120)$$

Ker je kot sistema v točki  $s_1$

$$\angle \left[ \frac{4}{s(s + 0.5)} \right]_{s=-2.50+j4.33} = -235^\circ \quad (3.121)$$

mora prehitevalni kompenzator vnesti prehitevanje

$$\lambda = 55^\circ \quad (3.122)$$

Izberimo ničlo prehitevalnega kompenzatorja tako, da krajša pol sistema pri  $s = -0.5$ . Nato grafično ali analitično izračunamo še lego pola prehitevalnega kompenzatorja

$$\begin{array}{ll}
\text{ničla prehitevalnega kompenzatorja} & s = -0.5 \\
\text{pol prehitevalnega kompenzatorja} & s = -5.021
\end{array}$$

Torej ima prehitevalni kompenzator prenosno funkcijo

$$K_K \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\alpha T_1}} = K_K \frac{s + 0.5}{s + 5.021} \quad (3.123)$$

in sta ustrezni konstanti

$$T_1 = 2 \quad \alpha = 0.0996 \quad (3.124)$$

Iz pogoja absolutne vrednosti nato določimo konstanto  $K_K$

$$\left| K_K \frac{s+0.5}{s+5.021} \frac{4}{s(s+0.5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 1 \quad (3.125)$$

oz.

$$K_K = \left| \frac{(s+5.021)s}{4} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 6.26 \quad (3.126)$$

S tem smo določili prehitevalni kompenzator. Konstanto  $\beta$  zakasnilnega kompenzatorja določimo iz pogoja za konstanto hitrostnega pogreška

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_K(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ 6.26 \frac{s+0.5}{s+5.021} \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} \frac{4}{s(s+0.5)} \right] \\ &= \frac{6.26 \cdot 4}{5.021} \beta = 4.987 \beta = 80 \end{aligned} \quad (3.127)$$

Torej je

$$\beta = 16.04 \quad (3.128)$$

Končno izberemo  $T_2$ , tako da bo izpolnjeno

$$\left| \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{16.04 T_2}} \right|_{s=-2.5+j4.33} \doteq 1 \quad (3.129)$$

$$-5^0 < \angle \left[ \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{16.04 T_2}} \right]_{s=-2.5+j4.33} < 0^0 \quad (3.130)$$

Prvi pogoj zahteva čim večji  $T_2$ , drugi pogoj pa zadovoljimo s  $T_2 \geq 2$ . Izberimo  $T_2 = 5$  (s tem je kot glede na enačbo (3.130)  $-1.9^0$ ) oz.

$$\begin{aligned} \text{ničlo zakasnilnega kompenzatorja} \quad s &= -\frac{1}{T_2} = -0.2 \\ \text{pol zakasnilnega kompenzatorja} \quad s &= -\frac{1}{\beta T_2} = -0.01247 \end{aligned}$$

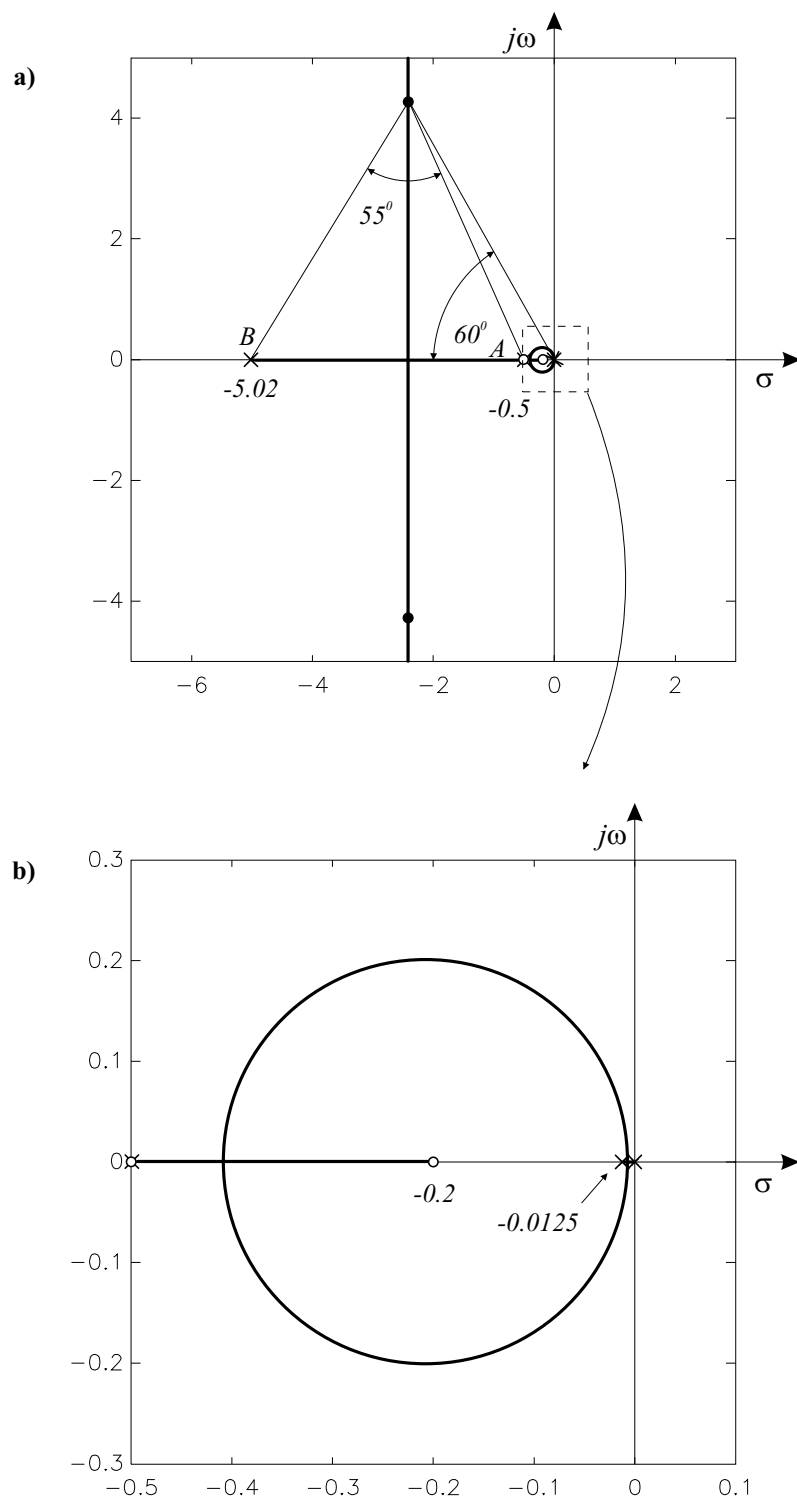
Načrtani kompenzator podaja prenosna funkcija

$$G_K(s) = 6.26 \left( \frac{s + 0.5}{s + 5.02} \right) \left( \frac{s + 0.2}{s + 0.01247} \right) \quad (3.131)$$

Čeprav prehitevalno-zakasnilni kompenzator v splošnem zveča red za dve, je v našem primeru odprtozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema zaradi omenjenega krajšanja le tretjega reda

$$G_K(s)G(s) = \frac{25.04(s + 0.2)}{s(s + 5.02)(s + 0.01247)} \quad (3.132)$$

Diagram lege korenov kompenziranega sistema prikazuje slika 3.38.



Slika 3.38: a) Diagram lege korenov kompenziranega sistema  
b) Detajl v okolici koordinatnega izhodišča

Ker je fazni prispevek zakasnilnega dela majhen, je odstopanje dominantnega para od želene lege relativno majhno. Dosegli smo pola

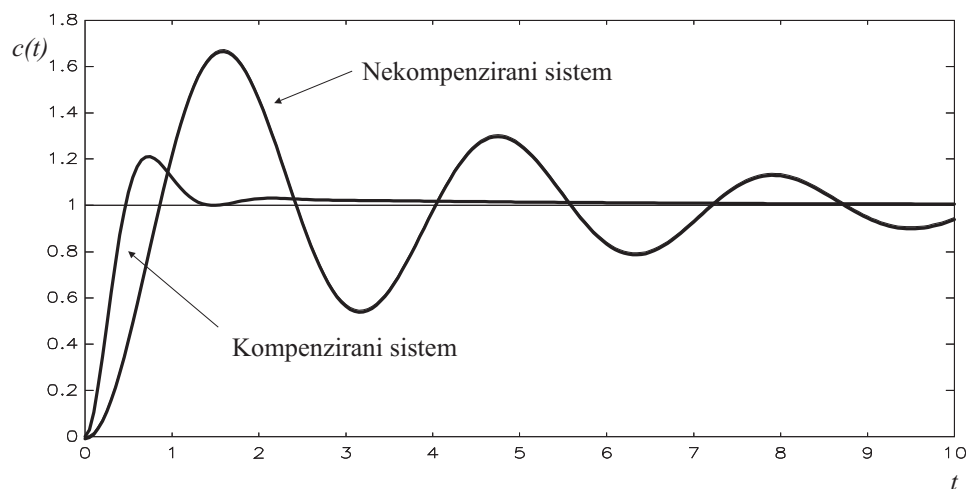
$$s_{1,2} = -2.412 \pm j4.275 \quad (\zeta = 0.49) \quad (3.133)$$

Tretji zaprtzančni pol je pri

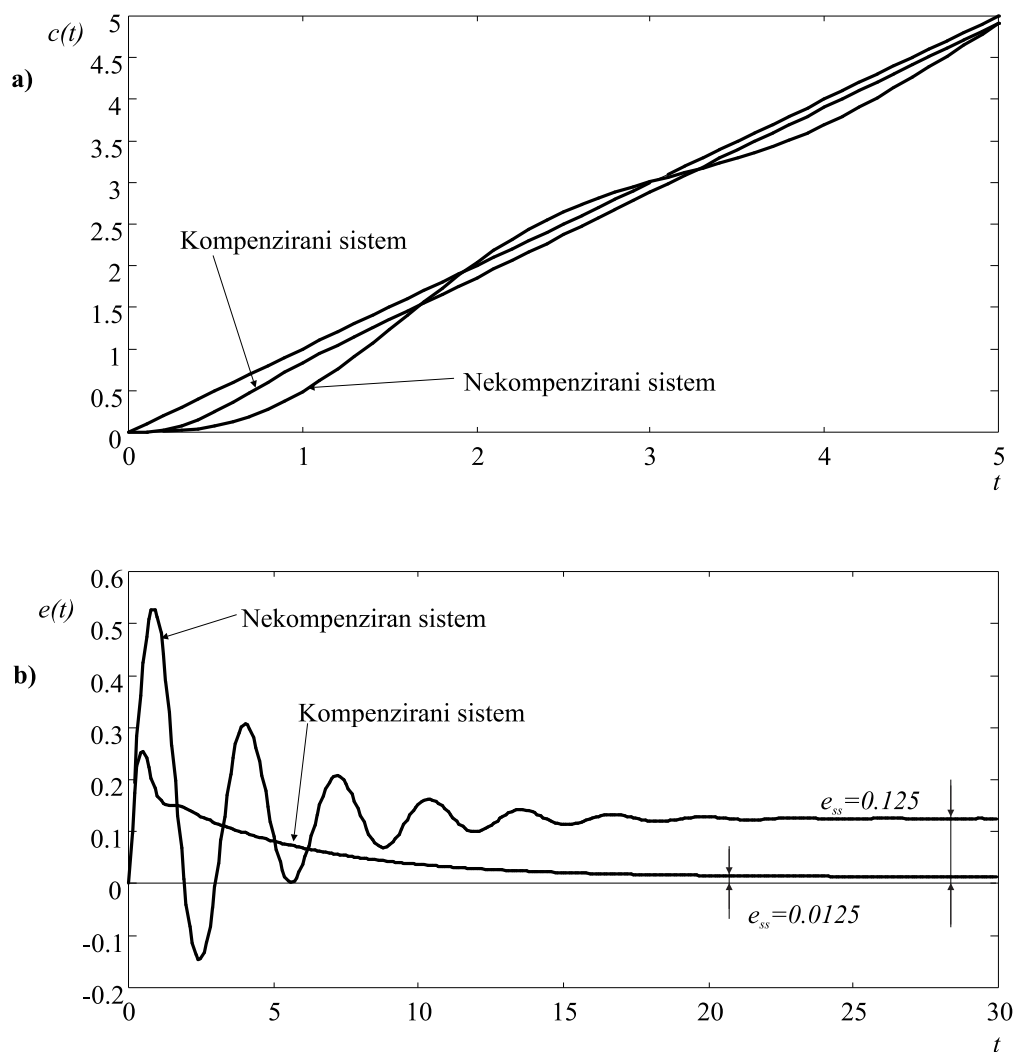
$$s = -0.2085 \quad (3.134)$$

Ker je ta pol zelo blizu ničle pri  $s = -0.2$ , je učinek tega pola na prehodni pojav majhen. Torej smo izpolnili ustrezne zahteve.

Slika 3.39 prikazuje odziva nekompenziranega in kompenziranega sistema na stopničasto spremembo reference. Slika 3.40 pa prikazuje odziva pri linearno naraščajočem referenčnem signalu ter ustrezna pogreška. Napaka v ustaljenem stanju se je s kompenzacijo 10 krat zmanjšala ( $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$ ).



Slika 3.39: Odziva nekompenziranega in kompenziranega sistema na stopničasto spremembo reference



Slika 3.40: Odziva nekompenziranega in kompenziranega sistema na linearno naraščajočo referenco in signala pogreška (a) in ustrezna pogreška (b)

□

Postopek pri  $\frac{1}{\alpha} = \beta$

Prenosna funkcija kompenzatorja je

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \quad \beta > 1 \quad (3.135)$$

V tem primeru običajno uporabljamo nekoliko spremenjeni postopek, ki ga opisujejo naslednje točke:

1. Določimo lego želenega dominantnega para polov ( $s_{1,2}$ ).
2. Določimo  $K_K$ , tako da zadovoljimo konstanto pogreška (to je možno, ker je v tem primeru ojačenje prehitevalno - zakasnilnega kompenzatorja  $K_K$  neodvisno od lege polov in ničel; torej je ojačenje kompenziranega sistema odvisno le od ojačenja sistema in od ojačenja kompenzatorja  $K_K$ ).
3. Določimo pol in ničlo prehitevalnega kompenzatorja, tako da zadovoljimo kotnemu pogoju in pogoju absolutne vrednosti

$$\angle \left[ \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right] = \lambda \quad (3.136)$$

$$\left| K_K \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} G(s_1) \right| = 1 \quad (3.137)$$

ob predpostavki, da naknadno določeni zakasnilni kompenzator (konstanta  $T_2$ ) ne bo znatneje vplival na absolutno vrednost in fazni kot v točki  $s = s_1$ .

4. Ob že prej določeni konstanti  $\beta$  določimo  $T_2$ , tako da je izpolnjeno

$$-5^\circ < \angle \left[ \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right] < 0^\circ \quad (3.138)$$

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1 \quad (3.139)$$

**Primer 3.6** Za enak regulacijski sistem in za enake zahteve kot v primeru 3.5 želimo načrtati prehitevalno - zakasnilni kompenzator s pogojem  $\frac{1}{\alpha} = \beta$ .

Sistem ima torej prenosno funkcijo



$$G(s) = \frac{4}{s(s + 0.5)} \quad (3.140)$$

S pomočjo kompenzatorja

$$G_K(s) = K_K \frac{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})}{(s + \frac{\beta}{T_1})(s + \frac{1}{\beta T_2})} \quad \beta > 1 \quad (3.141)$$

je potrebno doseči zaprtizančni dominantni par korenov

$$s_{1,2} = -2.50 \pm j4.33 \quad (\zeta = 0.5, \quad \omega_n = 5 \text{ rds}^{-1}) \quad (3.142)$$

ter  $K_v = 80 \text{ s}^{-1}$ .

Ker je konstanta hitrostnega pogreška

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_K(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_K \frac{4}{0.5} = 8K_K = 80 \quad (3.143)$$

je

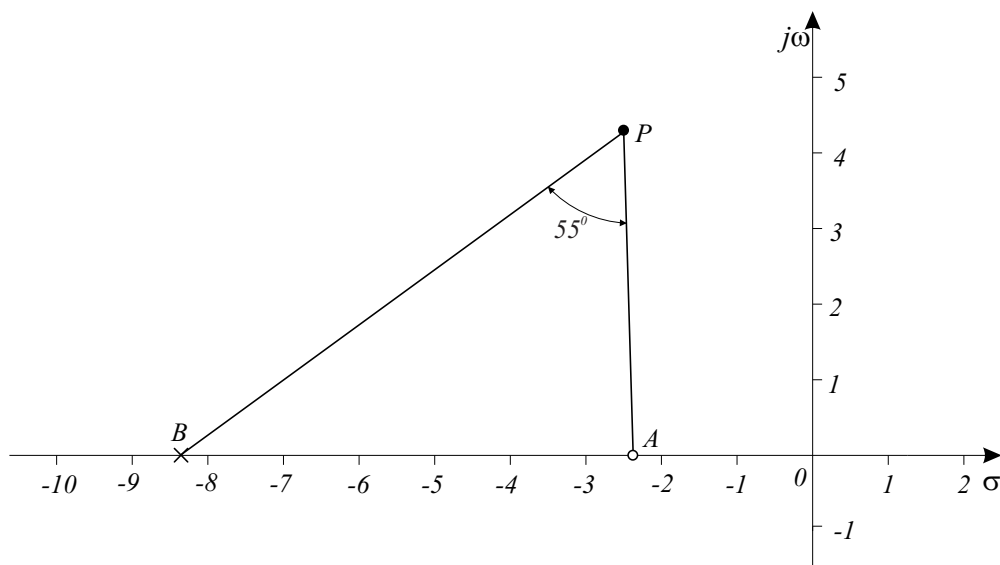
$$K_K = 10 \quad (3.144)$$

Za določitev lege pola in ničle prehitevalnega kompenzatorja pride v tem primeru v poštev le ena rešitev, ki izpolnjuje pogoj absolutne vrednosti in kotni pogoj ( $s$   $T_1$  in  $\beta$  je v tem primeru treba zagotoviti pravilno lego polov, v prejšnjem primeru pa je bilo važno le to, da je DLK potekal skozi zeleno točko). Dve neznanki  $T_1$  in  $\beta$  sta določljivi s pomočjo enačb

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \left| \frac{40}{s(s + 0.5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| 1.677 = 1 \quad (3.145)$$

$$\angle \left[ \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right]_{s=-2.5+j4.33} = 55^\circ \quad (3.146)$$

Slika 3.41 nam služi kot pomoč za določitev pola in ničle.



Slika 3.41: Določitev pola in ničle prehitevalnega kompenzatorja

Točki  $A$  in  $B$  lahko določimo tako, da velja

$$\begin{aligned} \angle[APB] &= 55^\circ \\ \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} &= \frac{1}{1.677} \approx 0.60 \end{aligned} \quad (3.147)$$

Torej je

$$\begin{aligned} \text{ničla prehitevalnega kompenzatorja } s &= -2.38 \\ \text{pol prehitevalnega kompenzatorja } s &= -8.34 \end{aligned}$$

oz. ustrezni konstanti

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2.38} = 0.420 \\ \beta &= 8.34T_1 = 3.503 \end{aligned} \quad (3.148)$$

$T_2$  izberemo dovolj velik, da sta pol in ničla zakasnilnega dela blizu koordinatnega izhodišča (majhna sprememba absolutne vrednosti in kota). To dosežemo z izbiro

$$T_2 = 10 \quad (3.149)$$

Torej sta ničla in pol zakasnilnega dela pri

$$\begin{aligned} \text{ničla zakasnilnega kompenzatorja} \quad s &= -\frac{1}{T_2} = -0.1 \\ \text{pol zakasnilnega kompenzatorja} \quad s &= -\frac{1}{\beta T_2} = -0.0285 \end{aligned}$$

S tem imamo dokončno obliko kompenzatorja

$$G_K(s) = 10 \frac{s + 2.38}{s + 8.34} \frac{s + 0.1}{s + 0.0285} \quad (3.150)$$

in odprtozančno prenosno funkcijo kompenziranega sistema

$$G_K(s)G(s) = \frac{40(s + 2.38)(s + 0.1)}{(s + 8.34)(s + 0.0285)s(s + 0.5)} \quad (3.151)$$

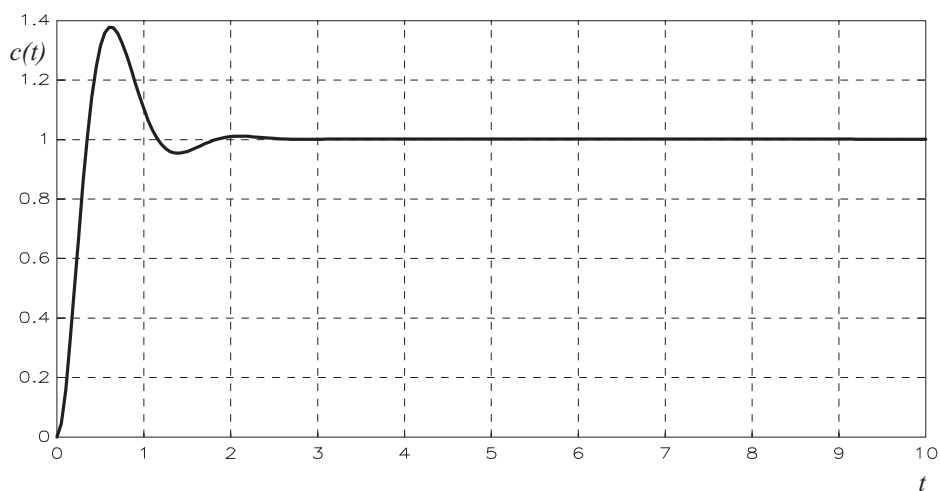
V tem primeru ne pride do nikakršnega krajšanja polov in ničel v odprtozančni prenosni funkciji, zato je odprtozančni kompenziran sistem 4. reda. Kotni prispevek zakasnilnega dela je majhen, zato je tudi lega konjugirano kompleksnih polov zelo blizu želeni legi

$$s_{1,2} = -2.454 \pm j4.310 \quad (3.152)$$

Preostala pola zaprtozančnega sistema sta pri

$$\begin{aligned} s_3 &= -0.1 \\ s_4 &= -3.86 \end{aligned} \quad (3.153)$$

Zaprtozančni pol pri  $s = -0.1$  se krajša z ničlo pri  $s = -0.1$ , tako da ne vpliva na odziv. Toda preostali pol pri  $s = -3.86$  le delno kompenzira ničla pri  $s = -2.38$ . Ta ničla zato nekoliko poveča prevzpon zaprtozančnega sistema (glede na prevzpon, ki je sicer dosežen z  $\zeta$  in  $\omega_n$ ). Slika 3.42 prikazuje odziv kompenziranega zaprtozančnega sistema na stopničasto spremembo reference.



Slika 3.42: Odziv kompenziranega sistema na stopničasto spremembo reference

□

### 3.4.3 Prehitevalno - zakasnilna kompenzacija s pomočjo Bodejevega diagrama

Pri prehitevalno - zakasnilni kompenzaciji kombiniramo oba postopka, t.j. postopek za načrtovanje prehitevalnega in zakasnilnega kompenzatorja.

Uporabimo kompenzator

$$G_K(s) = K_K \frac{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})}{(s + \frac{\beta}{T_1})(s + \frac{1}{\beta T_2})} \quad \beta > 1 \quad (3.154)$$

Prehitevalni del (del s  $T_1$ ) modificira frekvenčno karakteristiko z ustreznim faznim prehitevanjem, ki poveča fazni razložek pri frekvenci  $\omega_1$ . Zakasnilni del (del s  $T_2$ ) pa uvaža ojačenje pri nizkih frekvencah, kar izboljša vedenje regulacijskega sistema v ustaljenem stanju. Enega izmed različnih možnih postopkov bomo prikazali v primeru.

**Primer 3.7** Regulacijski sistem z enotino povratno zanko vsebuje odprtozančno prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad (3.155)$$

Želimo načrtati kompenzator, tako da bo zaprtozančni sistem izpolnjeval naslednje pogoje:

|                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| konstanta hitrostnega pogreška | $K_v = 10s^{-1}$               |
| fazni razložek                 | $\Phi_m = 50^0$                |
| ojačevalni razložek            | $K_m[\text{dB}] = 10\text{dB}$ |

Ojačenje  $K_K$  lahko določimo takoj, saj ima preostali del kompenzatorja ojačenje 1 in kasneje ne spremeni konstante pogreška.

Iz zahteve po ustrezni konstanti hitrostnega pogreška dobimo

$$\begin{aligned} K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_K(s)G(s) &= \frac{K_K}{2} = 10 \\ K_K &= 20 \end{aligned} \quad (3.156)$$

Vpeljemo prenosno funkcijo

$$G_1(s) = K_K G(s) = 20G(s) \quad (3.157)$$

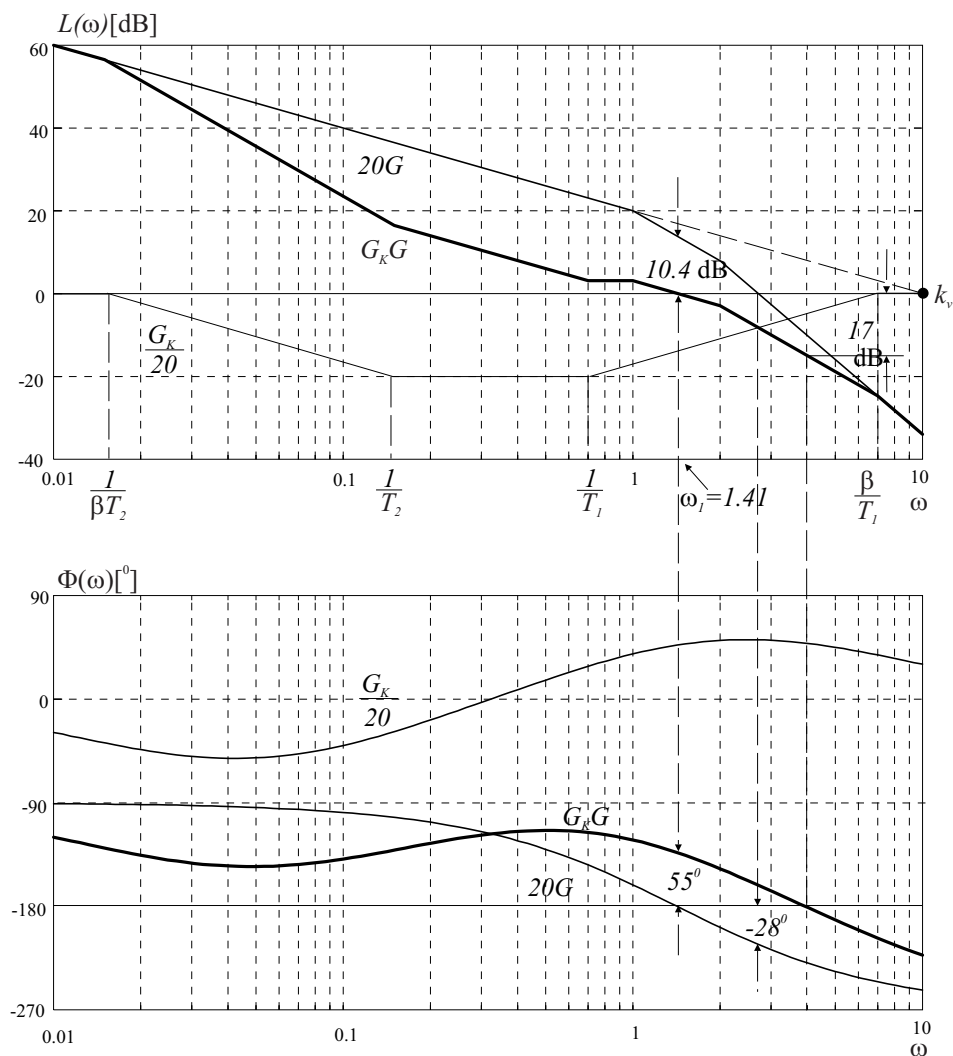
in narišemo njen Bodejev diagram (slika 3.43).

Vidimo, da je fazni razložek sistema  $G_1(s)$  enak  $-28^0$ , torej je pripadajoči zaprtozančni sistem nestabilen.

V naslednjem koraku izberemo frekvenco  $\omega_1$  kompenziranega sistema. Ker je

$$\angle[G_1(j\omega)] = -180^0 \quad \text{pri } \omega = 1.41\text{rds}^{-1} \quad (3.158)$$

je smiselno frekvenco  $\omega = 1.41\text{rds}^{-1}$  izbrati za  $\omega_1$  kompenziranega sistema. Zato je potrebno pri novo izbrani frekvenci  $\omega_1$  uvesti cca  $50^0$  faznega prehitevanja, kar je možno doseči z enojnim prehitevalnim kompenzatorjem.



Slika 3.43: Bodejev diagram nekompenziranega in kompenziranega sistema

Potem ko izberemo frekvenco  $\omega_1 = 1.41 \text{ rds}^{-1}$ , lahko izberemo ničlo zakasnilnega dela. Izberemo jo tako, da bo ustrezna lomna točka približno 10 krat manjša od frekvence  $\omega_1$

$$\omega = \frac{1}{T_2} = 0.15 \text{ rds}^{-1} \quad (3.159)$$

Pomeni, da ima zakasnilni del ničlo pri

$$s = -0.15 \quad (3.160)$$

Konstanto  $\beta$  določimo iz zahtev po faznem prehitevanju prehitevalnega kompenzatorja

Ker velja

$$\sin \Phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad (3.161)$$

dobimo za  $\beta = 10$  fazno prehitevanje  $55^\circ$ . Torej je primerno, da izberemo  $\beta = 10$ .

S tem izračunamo tudi pol zakasnilnega dela

$$s = -\frac{1}{\beta T_2} = -0.015 \quad (3.162)$$

torej ima zakasnilni del obliko

$$G'(s) = \frac{s + 0.15}{s + 0.015} \quad (3.163)$$

Prehitevalni del načrtamo tako, da zagotovi novo frekvenco  $\omega_1 = 1.41 rds^{-1}$ .

Ker je

$$20 \log |G_1(j\omega_1)| = 10.4 \text{ dB} \quad (3.164)$$

mora v tej točki prehitevalni kompenzator vnesti slabljenje  $-10.4 \text{ dB}$ . S pomočjo poševne črte pod kotom  $+20 \text{ dB/dek}$  skozi točko  $(-10.4 \text{ dB}, 1.41 \text{ rds}^{-1})$ , dobimo v presečiščih z  $0 \text{ dB}$  in  $-20 \text{ dB}$  ustrezne lomne frekvence  $\omega = 0.7 \text{ rds}^{-1}$  in  $\omega = 7 \text{ rds}^{-1}$ . Torej je prehitevalni kompenzator

$$G''(s) = \frac{s + 0.7}{s + 7} \quad (3.165)$$

prenosna funkcija celotnega kompenzatorja pa

$$G_K(s) = K_K G'(s) G''(s) = 20 \left( \frac{s+0.7}{s+7} \right) \left( \frac{s+0.15}{s+0.015} \right) \quad (3.166)$$

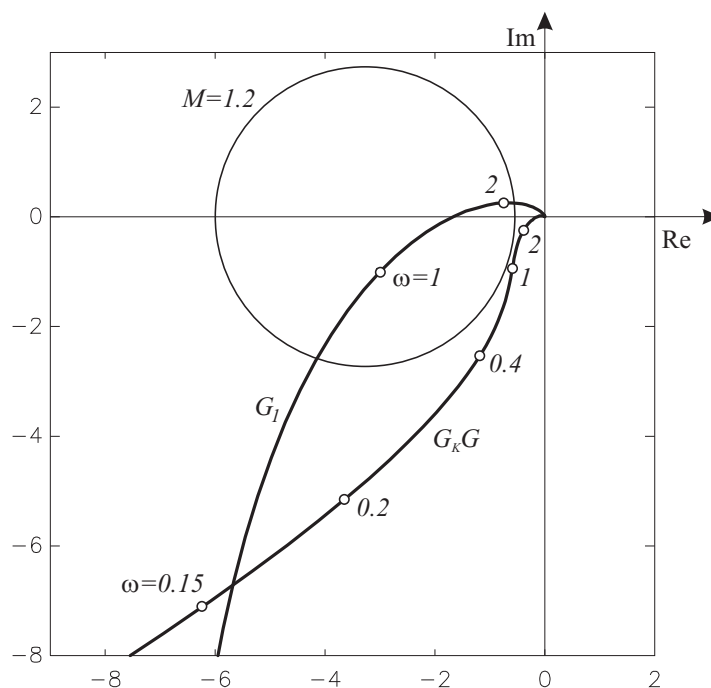
Celoten postopek v Bodejevem diagramu prikazuje slika 3.43.

S kompenzacijo smo torej dosegli:

|                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| konstanta hitrostnega pogoška | $K_v = 10s^{-1}$               |
| fazni razložek                | $\Phi_m = 55^\circ$            |
| ojačevalni razložek           | $K_m[\text{dB}] = 17\text{dB}$ |

Slika 3.44 prikazuje polarni diagram nekompenziranega sistema  $G_1(s)$  in kompenziranega sistema  $G_K(s)G(s)$ . Kompenzirani sistem ima resonančni vrh približno  $M_r = 1.2$  pri resonančni frekvenci  $\omega_r \doteq 1.5 \text{ rad/s}$ .

Na sliki 3.44 lahko opazimo osnovno idejo kompenzacije, ki smo jo omenili na začetku.



Slika 3.44: Polarni diagram nekompenziranega in kompenziranega sistema



□

### 3.4.4 PID regulator

*PID* regulator s prenosno funkcijo

$$\begin{aligned}
 G_R(s) &= K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \\
 &= K_P T_D \frac{\left[ s + \left( \frac{1}{2T_D} + \sqrt{\frac{1}{4T_D^2} - \frac{1}{T_D T_I}} \right) \right] \left[ s + \left( \frac{1}{2T_D} - \sqrt{\frac{1}{4T_D^2} - \frac{1}{T_D T_I}} \right) \right]}{s} = \\
 &= K_K \frac{\left( s + \frac{1}{T_1} \right) \left( s + \frac{1}{T_2} \right)}{s}
 \end{aligned} \tag{3.167}$$

je posebni primer prehitevalno-zakasnilnega kompenzatorja s poloma in ničlami, kot prikazuje slika 3.45. Pol zakasnilnega dela je torej v koordinatnem izhodišču, pol prehitevalnega dela pa je pri  $s = -\infty$ .

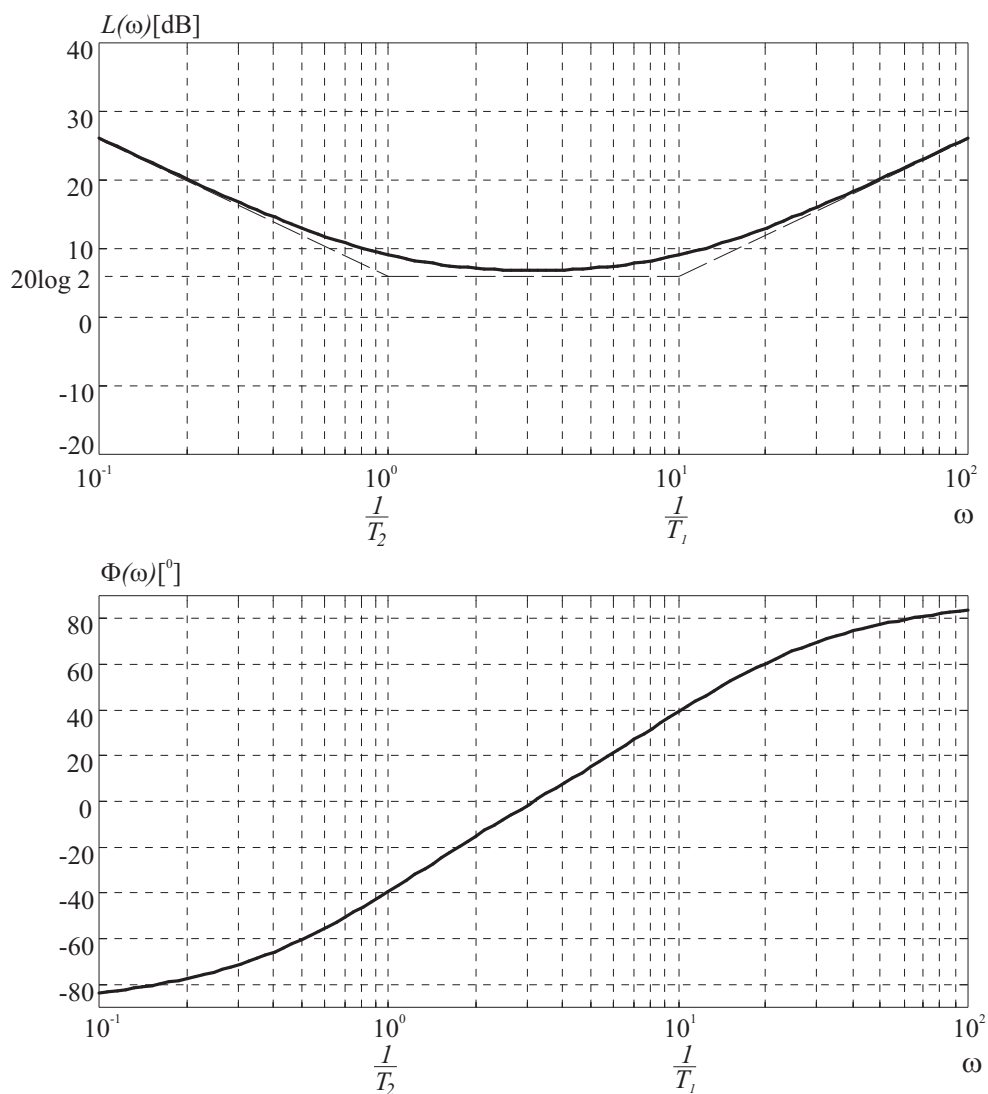


Slika 3.45: Poli in ničle *PID* regulatorjev

**Primer 3.8** Slika 3.46 prikazuje Bodejev diagram regulatorja

$$G_R(s) = 2.2 \left[ 1 + \frac{0.909}{s} + 0.09s \right] = \frac{0.2(s+1)(s+10)}{s} = \frac{2(0.1s+1)(s+1)}{s} \tag{3.168}$$

Vidimo, da ima regulator pri nizkih frekvencah visoko ojačenje, kar odpravlja pogošek v ustaljenem stanju, pri visokih frekvencah pa vnaša fazno prehitevanje, kar zagotovi potreben fazni razložek. □

Slika 3.46: Bodejev diagram *PID* regulatorja

### Nastavitvena pravila za uglaševanje *PID* regulatorja s pomočjo Bodejevega diagrama

*P*, *PI* ali *PID* regulator lahko uglasimo s pomočjo Bodejevega diagrama odprtozančne prenosne funkcije  $G(s)H(s)$  v primeru, če je le ta vsaj drugega reda. Nastavitvena pravila temeljijo na tem, da zagotovijo potrebni fazni razložek.

#### *P* regulator

Nastavitvena pravila priporočajo, da določimo absolutno vrednost frekvenčne karakteristike pri faznem kotu  $-162^\circ$ . Ojačenje v regulacijski zanki izberemo tako, da je

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega')H(j\omega')|} \quad \angle[G(j\omega')H(j\omega')] = -162^\circ \quad (3.169)$$

Frekvenca, pri kateri je faza  $-162^\circ$ , postane torej frekvenca  $\omega_1$  kompenziranega sistema, fazni razložek pa je  $\Phi_m = 18^\circ$ .

*PI* regulator

Ojačenje v regulacijski zanki izračunamo s pomočjo absolutne vrednosti frekvenčne karakteristike pri faznem kotu  $-144^\circ$

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega'')H(j\omega'')|} \quad \angle[G(j\omega'')H(j\omega'')] = -144^\circ \quad (3.170)$$

Na ta način sicer na prvi pogled izgleda, da smo dosegli večji fazni razložek, vendar pa *I* člen vnaša zaostajanje v fazno karakteristiko, kar zmanjša fazni razložek. Integrirni čas  $T_I$  izračunamo tako, da predhodno določimo frekvenco  $\omega'$ , kjer je fazni kot  $-162^\circ$

$$T_I = \frac{2\pi}{\omega'} \quad \angle[G(j\omega')H(j\omega')] = -162^\circ \quad (3.171)$$

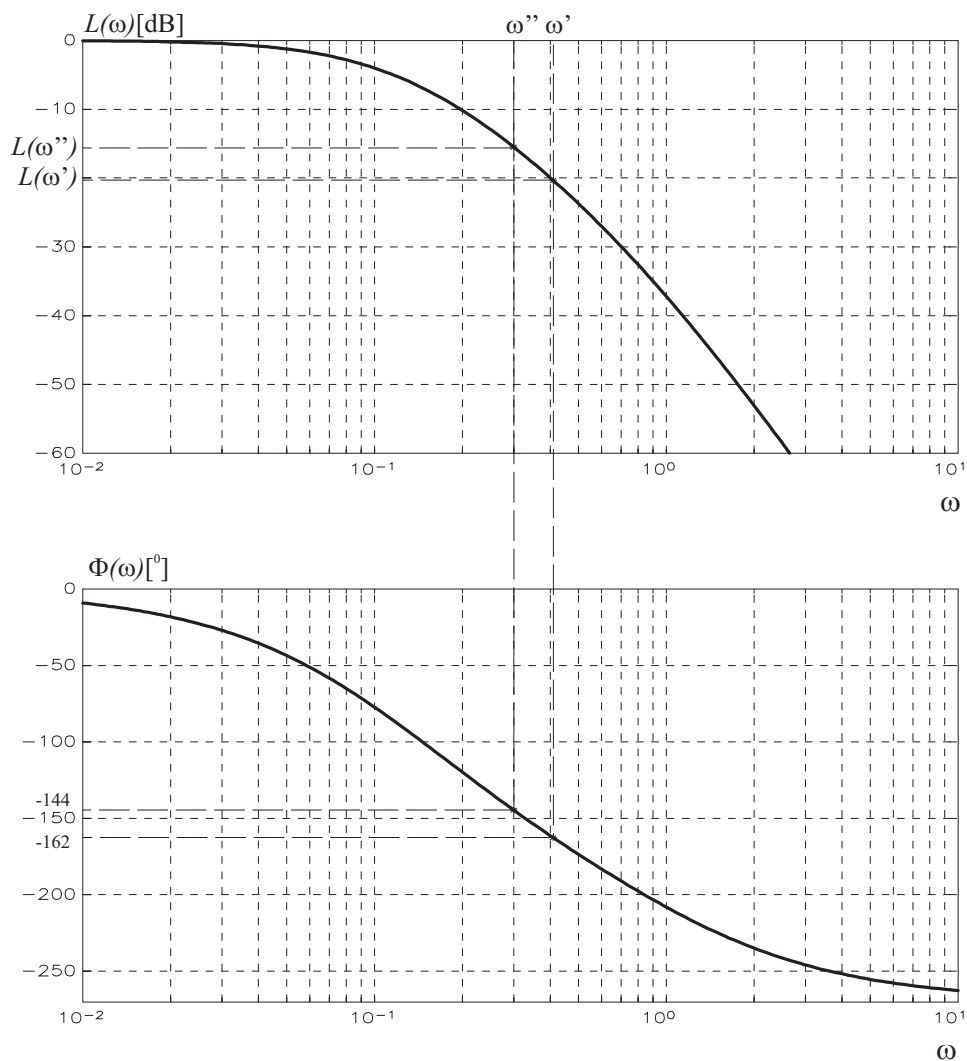
*PID* regulator

Konstanti  $K_P$  in  $T_I$  določimo kot pri *PI* regulatorju. Diferencirni čas  $T_D$  pa izberemo

$$T_D = 0.1T_I \quad (3.172)$$

Ustrezen postopek prikazuje slika 3.47.

**Primer 3.9** Načrtajte *PID* regulator za proces

Slika 3.47: Uglasovanje *PID* regulatorja v Bodejevem diagramu

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(5s+1)(10s+1)} \quad (3.173)$$

Iz Bodejevega digrama, ki ga prikazuje slika 3.47, določimo

$$\begin{aligned} L(\omega') &= -20.3\text{dB} & \omega' &= 0.41\text{rds}^{-1} & (\Phi(\omega') &= -162^\circ) \\ L(\omega'') &= -15.5\text{dB} & & & (\Phi(\omega'') &= -144^\circ) \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} |G(j\omega')| &= 0.096 \\ |G(j\omega'')| &= 0.168 \end{aligned} \quad (3.174)$$

Za  $P$  regulator izberemo ojačenje

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega')|} = 10.4 \quad (3.175)$$

za  $PI$  regulator pa parametra

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega'')|} = 5.9 \quad (3.176)$$

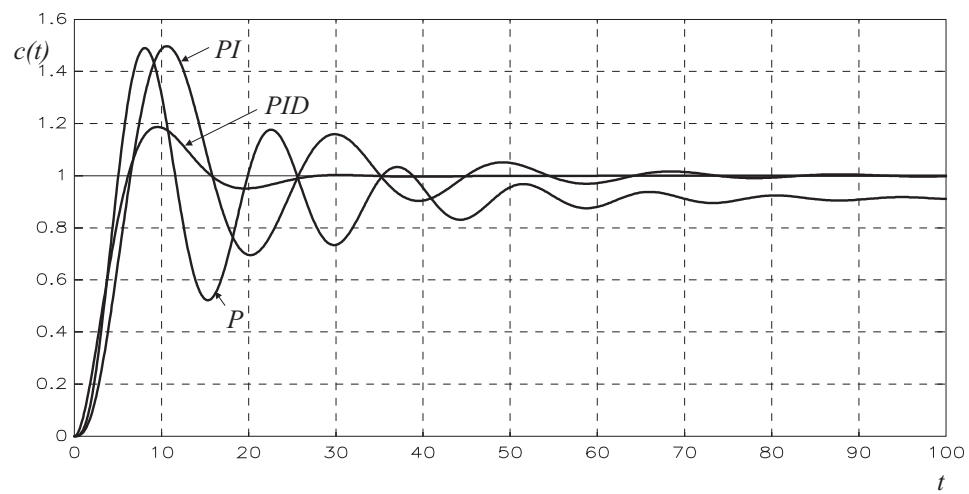
$$T_I = \frac{2\pi}{\omega'} \doteq 15.3 \quad (3.177)$$

Za  $PID$  regulator dodamo  $D$  člen z diferencirnim časom

$$T_D = 0.1T_I = 1.53 \quad (3.178)$$

□

Rezultate simulacije za načrtane regulacijske sisteme prikazuje slika 3.48. Vidimo, da ima regulacijski sistem pri  $P$  in  $PI$  regulatorjih nedopustno velik prevzpon (cca. 50%).  $P$  regulator ima tudi pogrešek v ustaljenem stanju.  $D$  člen v  $PID$  regulatorju uvede dodatno dušenje, tako da se prevzpon zmanjša pod 20%.



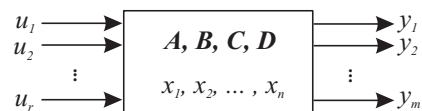
Slika 3.48: Odzivi  $P$ ,  $PI$  in  $PID$  regulacijskih sistemov na stopničasti signal pogoška ( $r=1$ )

## 4.

# Analiza sistemov v prostoru stanj

Obravnava sistemov v prostoru stanj se je začela uporabljati po letu 1960. Glavna prednost je v tem, da je možno obravnavati tudi multivariabilne, nelinearne in časovno spremenljive sisteme. Metode v prostoru stanj so zelo primerne za računalniško obravnavo sistemov.

Slika 4.1 prikazuje linearni dinamični sistem z  $r$  vhodi,  $m$  izhodi in  $n$  stanji.



Slika 4.1: Linearni dinamični sistem

Le tega lahko opišemo v prostoru stanj z vektorskima enačbama

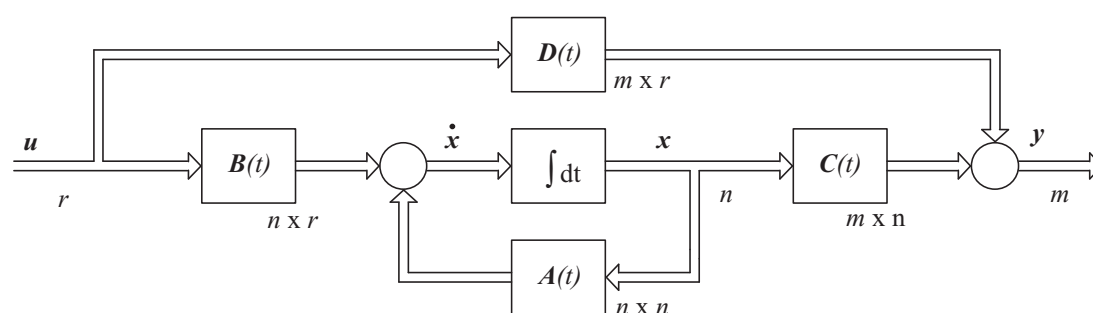
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

z naslednjimi dimenzijami vektorjev in matrik:

|                                    |                                      |       |              |
|------------------------------------|--------------------------------------|-------|--------------|
| vektor stanj, odvod vektorja stanj | $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$ | ..... | $n \times 1$ |
| vektor vhodov                      | $\mathbf{u}(t)$                      | ..... | $r \times 1$ |
| vektor izhodov                     | $\mathbf{y}(t)$                      | ..... | $m \times 1$ |
| sistemska matrika                  | $\mathbf{A}(t)$                      | ..... | $n \times n$ |
| vhodna matrika                     | $\mathbf{B}(t)$                      | ..... | $n \times r$ |
| izhodna matrika                    | $\mathbf{C}(t)$                      | ..... | $m \times n$ |
| vhodno-izhodna matrika             | $\mathbf{D}(t)$                      | ..... | $m \times r$ |

Ustrezno bločno shemo prikazuje slika 4.2.



Slika 4.2: Bločna shema sistema, ki je zapisan v prostoru stanj

Obravnavali bomo le časovno nespremenljive sisteme, kar pomeni, da so matrike  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{D}$  časovno neodvisne, ter sisteme z enim vhodom in izhodom ( $r = m = 1$ ). V tem primeru postane  $\mathbf{B}$  stolpni vektor,  $\mathbf{C}$  vrstični vektor in  $\mathbf{D}$  konstanta.

## 4.1 Odziv linearne časovno nespremenljivega sistema

### Odziv homogenega sistema

Značilno za homogen sistem je, da ga ne vzbujamo z vhodnim signalom, ampak le z začetnim stanjem. Zato sistem opisuje enačba

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.4)$$



Časovni odziv takega sistema je odvisen od začetnega stanja  $\mathbf{x}(0)$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}(0) \quad (4.5)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}(0) \quad (4.6)$$

kjer je  $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  matrika prehajanja stanj. Enačbo (4.5) se da enostavno potrditi, saj velja

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad (4.7)$$

### Odziv nehomogenega sistema

Nehomogen sistem vzbujamo v splošnem z začetnim stanjem in vhodnim signalom. V prostoru stanj ga podajata enačbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad (4.8)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x} + D u \quad (4.9)$$

Časovni odziv podaja enačba

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \tau) \mathbf{B} u(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} \mathbf{\Phi}(t - \tau) \mathbf{B} u(\tau) d\tau + D u(t) \quad (4.11)$$

Enačbi (4.10) in (4.11) veljata, če je začetni čas enak nič. Če pa je začetni čas enak  $t_0$ , je odziv določen z enačbama

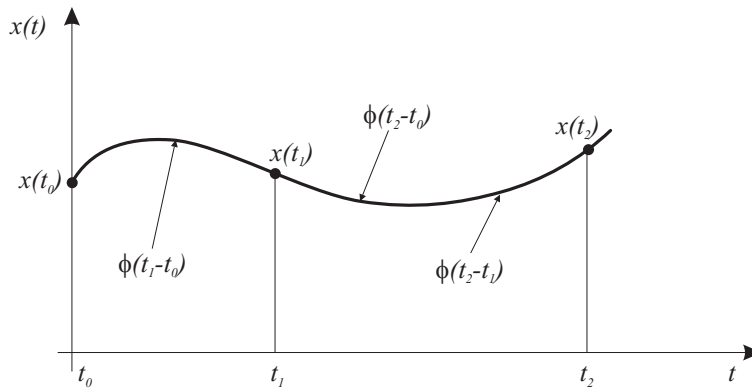
$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (4.12)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}\Phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau + Du(t) \quad (4.13)$$

Matrika prehajanja stanj  $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$  ima naslednje lastnosti:

1.  $\Phi(0) = \mathbf{I}$
2.  $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3.  $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
4.  $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$  za vsak  $t_2, t_1, t_0$

Ta lastnost je pomembna, ker kaže na to, da prehod iz začetnega stanja v končno stanje lahko razdelimo v več delnih prehodov. Razmere ilustrira slika 4.3.



Slika 4.3: Lastnost matrike prehajanja stanj

5.  $[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$

Če zapis v prostoru stanj (4.8) in (4.9) transformiramo z Laplace-ovo transformacijo, dobimo izraz

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (4.15)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + DU(s) \quad (4.16)$$

Časovni odziv izračunamo z inverzno Laplace-ovo transformacijo

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)] \quad (4.17)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[(\mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s))] \quad (4.18)$$

## 4.2 Računanje matrike prehajanja stanj

Izračun matrike prehajanja stanj  $e^{\mathbf{A}t}$  je torej ključnega pomena pri izračunu časovnega odziva. Poznamo več metod za njeno določitev.

### Razvoj v vrsto

Izraz  $e^{\mathbf{A}t}$  razvijemo v vrsto

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \quad (4.19)$$

Pri tem upoštevamo toliko členov, da dosežemo željeno natančnost. Metoda se zelo enostavno programira na računalniku.

### Uporaba Laplace-ove transformacije

Iz enačbe (4.17) je očitno, da je matrika prehajanja stanj

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (4.20)$$

### Silvestrov postopek

Pri uporabi Silvestrovega postopka je potrebno predhodno izračunati lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$ , tako da rešimo enačbo

$$\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (4.21)$$

Če so vse lastne vrednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  različne, napišemo  $n$  enačb

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2(t)\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Iz  $n$  enačb izračunamo  $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$  in nato matriko  $e^{\mathbf{A}t}$

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \quad (4.23)$$

V primeru večkratnih lastnih vrednosti je postopek nekoliko bolj zahteven. Za primer vzemimo, da so tri lastne vrednosti  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  enake, preostale  $\lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_m$  pa različne. V tem primeru nastavimo enačbe

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) + 3\alpha_3(t)\lambda_1 + \dots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-3} &= \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + 3\alpha_3(t)\lambda_1^2 + \dots + (m-1)\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-2} &= te^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_4 + \alpha_2(t)\lambda_4^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_4^{m-1} &= e^{\lambda_4 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} &= e^{\lambda_m t} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Iz  $m$  enačb izračunamo  $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{m-1}$  in nato matriko  $e^{\mathbf{A}t}$

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \quad (4.25)$$

### Uporaba diagonalne matrike $\Lambda$

Z določeno transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$  lahko prevedemo matriko  $\mathbf{A}$  v diagonalno obliko  $\Lambda$ . Le-ta ima na diagonalni lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$ . Popolna diagonalizacija je možna le v primeru različnih lastnih vrednosti  $\lambda_i$ , sicer se lahko diagonalni obliki le približamo (Jordanova oblika  $\mathbf{J}$ ).

Ob znani transformacijski matriki  $\mathbf{T}$  določimo diagonalno matriko  $\Lambda$  s pomočjo izraza

$$\Lambda = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (4.26)$$

Matriko prehajanja stanj pa določimo s pomočjo enačbe

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}e^{\Lambda t}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.27)$$

oz. v primeru večkratnih lastnih vrednosti

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.28)$$

Postopek za določitev transformacijske matrike si bomo ogledali kasneje.

**Primer 4.1** Določite matriko prehajanja stanj za sistemsko matriko

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Razvoj v vrsto

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[1 - 2t + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + \dots] \\ 0 & 1 - 2t + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + 2t + \frac{(2t)^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Uporaba Laplace-ove transformacije

$$\begin{aligned}
s\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \quad (4.31) \\
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\
e^{\mathbf{A}t} &= \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Silvestrov postopek

Iz enačbe

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (4.32)$$

izračunamo lastni vrednosti  $\lambda_1 = 0$  in  $\lambda_2 = -2$ . Nato nastavimo enačbi

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cdot 0 = e^{0 \cdot t} \quad (4.33)$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cdot (-2) = e^{-2 \cdot t} \quad (4.34)$$

Iz enačb dobimo

$$\alpha_0(t) = 1 \quad (4.35)$$

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \quad (4.36)$$

Torej je matrika prehajanja stanj

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Uporaba diagonalne matrike  $\mathbf{\Lambda}$

S pomočjo transformacijske matrike

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

lahko izračunamo diagonalno obliko

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{T}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.39)$$

□

## 4.3 Trajektorije v prostoru stanj

*Prostor stanj je definiran kot  $n$ -dimenzionalni prostor, v katerem komponente vektorja stanj, t.j. spremenljivke stanj predstavljajo koordinatne osi. Ko se čas  $t$  povečuje od začetnega časa  $t_0$ , opisuje vektor stanj  $\mathbf{x}(t)$  v prostoru stanj trajektorijo, ki izvira iz začetnega stanja  $\mathbf{x}(t_0)$ .  $t$  je torej parameter vzdolž trajektorije. S pomočjo omenjenih trajektorij običajno proučujemo avtonomne sisteme. To so sistemi, ki so "vzbujani" le z začetnim stanjem, ne pa tudi s časovno spremenljivim vhodnim signalom. Avtonomni sistem bomo torej v splošnem zapisali z enačbo*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (4.40)$$

Kadar gornja enačba predstavlja zapis

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.41)$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.42)$$

t.j. Frobeniusovo obliko v primeru linearnega sistema, pravimo spremenljivkam stanj *fazne spremenljivke*, prostoru stanj pa *fazni prostor*. Koordinate faznega prostora so torej odvisna spremenljivka  $x_1$  in  $(n - 1)$  odvodov te spremenljivke. Treba pa je tudi povedati, da se v literaturi nedosledno prikazuje razlika med spremenljivkami stanj in faznimi spremenljivkami, tako da imata često oba izraza identičen pomen. Grafična predstavitev trajektorij v faznem prostoru je učinkovita za rede, ki so manjši ali enaki tri, največ pa se uporablja za proučevanje linearnih in nelinearnih sistemov drugega reda, kjer se fazni prostor spremeni v *fazno ravnino*. Ker smo ugotovili, da se številni regulacijski sistemi vsaj v smislu dominantnega para polov vedejo kot sistemi drugega reda, je proučevanje s pomočjo fazne ravnine uporabno tudi pri analizi in načrtovanju regulacijskih sistemov.

Med avtonomne sisteme štejemo tudi sisteme s konstantnimi vhodnimi signali, saj je možno njihovo dinamično obnašanje ob ustrezni transformaciji koordinat v prostoru stanj vedno ponazoriti z določenim odzivom na začetno stanje. Če sistem, katerega vhod je konstantni signal  $u_0$

$$\dot{x} = ax + u_0 \quad x(0) = 0 \quad (4.43)$$

ustrezno transformiramo

$$\begin{aligned} x_t &= x + \frac{u_0}{a} \\ \dot{x}_t &= \dot{x} \end{aligned} \quad (4.44)$$

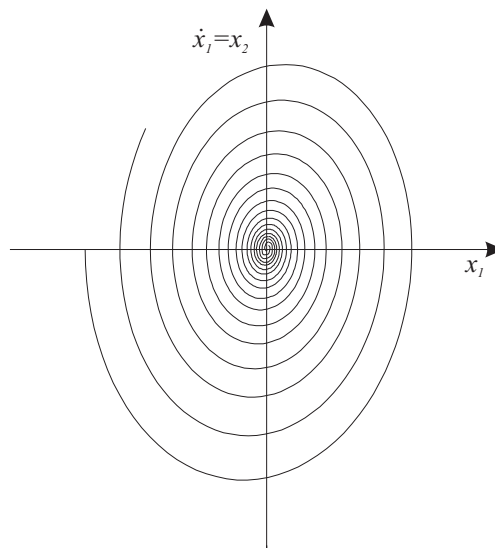
ga torej prevedemo v obliko



$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= a\left(x_t - \frac{u_0}{a}\right) + u_0 = ax_t \\ x_t(0) &= \frac{u_0}{a}\end{aligned}\tag{4.45}$$

### Fazni portret

*Fazni portret* tvorijo trajektorije, ki v faznem prostoru izvirajo iz različnih začetnih stanj. Skozi vsako nesusingularno točko faznega prostora poteka natanko ena fazna trajektorija. Fazne trajektorije se med seboj ne sekajo. Primer faznega portreta prikazuje slika 4.4.



Slika 4.4: Fazni portret

Za risanje faznega portreta imamo na voljo več metod. Omenili bomo simulacijo, vstavljanje časa v analitično rešitev, eliminacijo časa in metodo izoklin.

### Simulacija

Simulacija je metoda, ki se danes pretežno uporablja za risanje faznih portretov. S pomočjo določenega simulacijskega orodja (npr. simulacijski jezik) simuliramo dinamični sistem (linearen ali nelinearen), rezultate pa prikažemo v fazni ravnini

(običajno odvisna spremenljivka na abscisni osi in njen odvod na ordinatni osi). Postopek moramo seveda ponoviti pri različnih začetnih pogojih.

### Vstavljanje časa v analitično rešitev

Za linearne sisteme je možno enostavno priti do analitične rešitve  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$ . Če za  $t$  vstavljamo vrednosti od začetnega časa naprej v vse fazne spremenljivke, dobimo pri različnih začetnih pogojih fazni portret.

### Eliminacija časa

V enostavnih primerih je možno iz analitične rešitve eliminirati neodvisno spremenljivko  $t$  in dobiti relacijo  $\dot{x} = g(x)$ , kar je analitično izražena trajektorija pri določenem začetnem pogoju in sestavlja fazni portret.

### Metoda izoklin

Metoda izoklin je grafična metoda. Uporabnost prikazuje naslednji primer.

#### Primer 4.2 Sistem podaja enačba

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

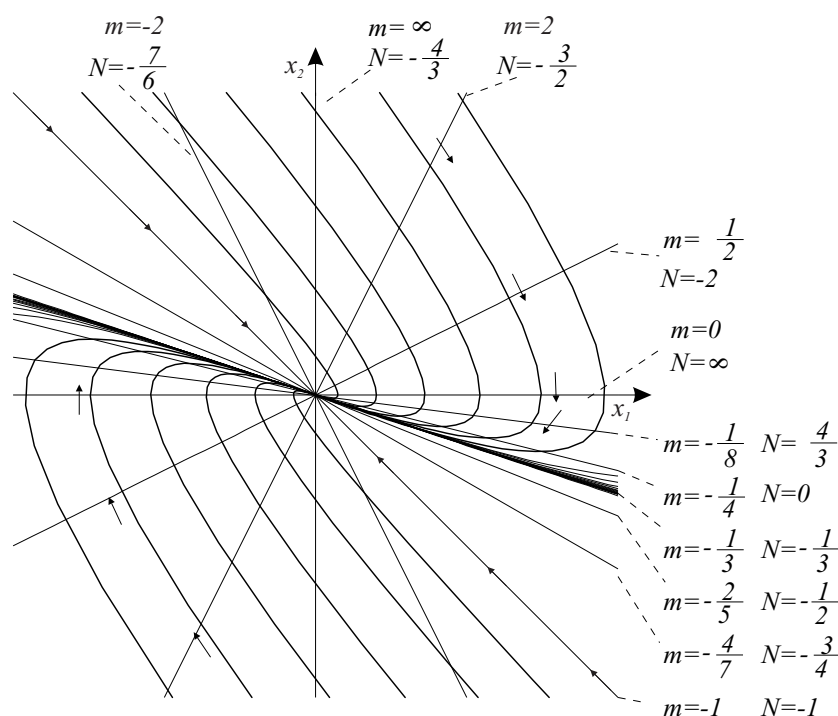
Če delimo obe enačbi stanj, dobimo

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - 4x_2}{3x_2} = N \quad (4.47)$$

Enačba določa naklon trajektorije, skozi katerokoli točko v fazni ravnini  $(x_1, x_2)$ . Če naklon  $N$  v enačbi (4.47) fiksiramo na določeno vrednost, dobimo enačbo premice

$$x_2 = -\frac{1}{4+3N}x_1 = mx_1 \quad (4.48)$$

ki ji rečemo *izoklina*. Za njo je značilno, da jo vse trajektorije sekajo pod enakim kotom. Če v ravnini  $(x_1, x_2)$  narišemo veliko takih izoklin (tako, da na gosto pokrijemo vse štiri kvadrante), je možno dokaj natančno določiti fazne trajektorije pri različnih začetnih pogojih in s tem fazni portret. Le tega za sistem (4.46) prikazuje slika 4.4.



Slika 4.5: Fazni portret sistema 2. reda

Vse trajektorije se zaključijo v koordinatnem izhodišču, vanj pa vstopajo pod naklonom, ki ga določa premica  $x_2 = -\frac{1}{3}x_1$ . V primeru začetnega pogoja  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  je odziv sistema

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-3t} \\ -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Če odziv v bližini ustaljenega stanja aproksimiramo le s prvima členoma v enačbi (4.49) in izraza za  $x_1$  in  $x_2$  vstavimo v enačbo (4.47), velja

$$N = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-3e^{-t} + 4e^{-t}}{-3e^{-t}} = -\frac{1}{3} \quad (4.50)$$

velja pa tudi

$$m = \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{-e^{-t}}{3e^{-t}} = -\frac{1}{3} \quad (4.51)$$

Edino trajektorija, ki jo dobimo pri začetnih pogojih  $x_1(0) = -x_2(0)$ , je drugačna. Poteka po premici  $x_2 = -x_1$ .  $\square$

## 4.4 Ravnotežne točke

Stanje sistema  $\mathbf{x}_e$  imenujemo *ravnatežno točko* ali *ravnatežno stanje*, če velja enačba

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad (4.52)$$

V primeru avtonomnih asimptotično stabilnih sistemov določa ravnatežna točka ustaljeno stanje. Z ustrezno transformacijo koordinat lahko vedno določeno ravnatežno točko prestavimo v koordinatno izhodišče faznega prostora ( $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ).

Ker za te točke ne velja osnovna zakonitost v faznem prostoru, t.j. da gre skozi določeno točko le ena trajektorija, jih imenujemo tudi *singularne točke*.

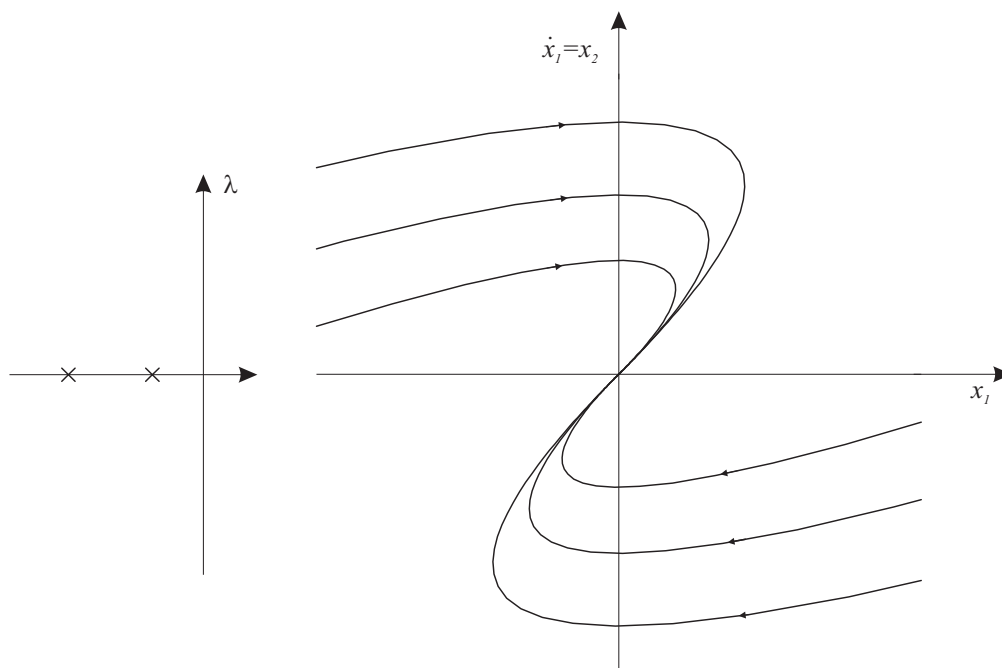
Linearni časovno nespremenljivi sistem ima le eno ravnatežno točko, če je le matrika  $\mathbf{A}$  nesingularna (sicer je neskončno ravnatežnih točk). V primeru nelinearnih sistemov je možnih več singularnih točk.

Različne oblike faznih portretov so pogojene z različnimi tipi ravnatežnih točk, le ti pa so odvisni od lastnih vrednosti linearne ali v okolici ravnatežne točke lineariziranega nelinearnega sistema.

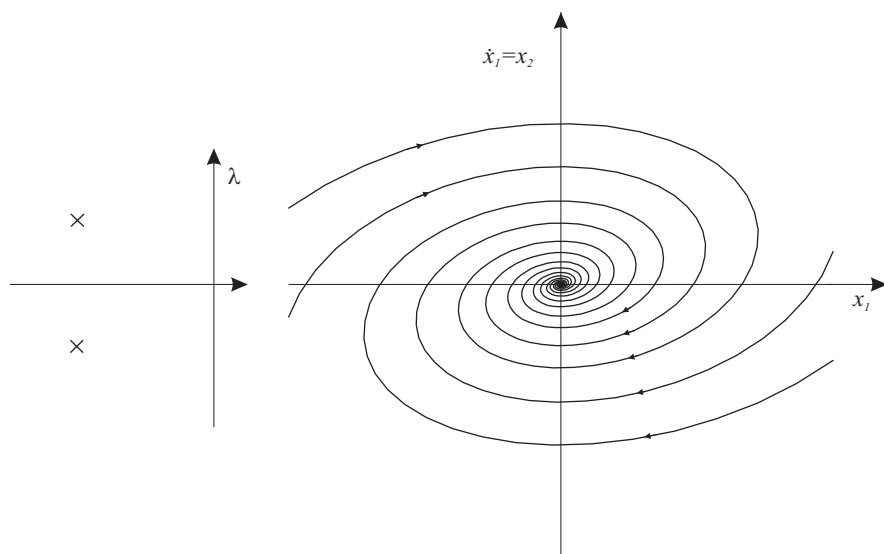
V povezavi s sistemom drugega reda uporabljamo naslednjo klasifikacijo ravnatežnih točk:

- stabilno vozlišče (stable node),
- stabilno žarišče (stable focus),
- nestabilno vozlišče (unstable node),
- nestabilno žarišče (unstable focus),
- sedlo (saddle point) in
- središče (centre).

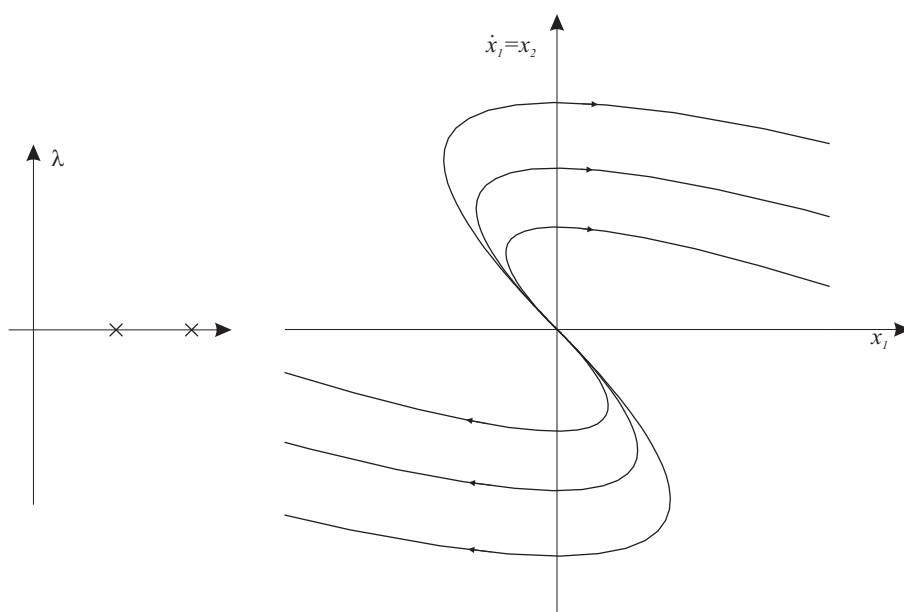
Slike 4.5 do 4.10 prikazujejo lege lastnih vrednosti (polov) in obliko faznega portreta v povezavi z določenim tipom ravnotežne točke.



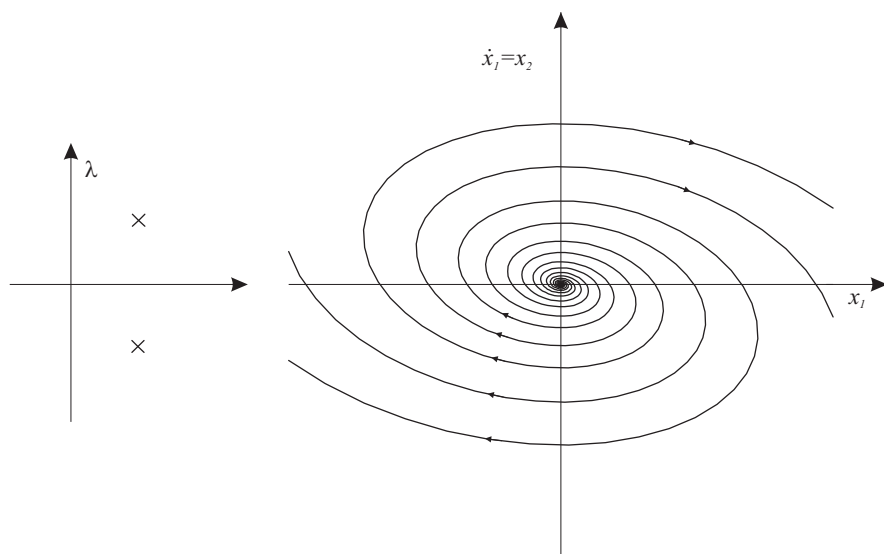
Slika 4.6: Stabilno vozlišče



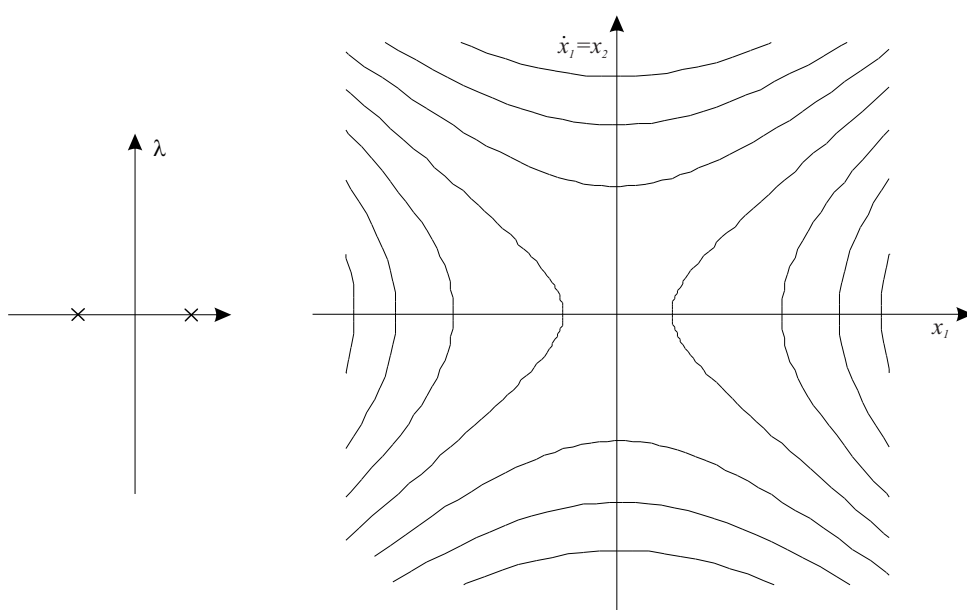
Slika 4.7: Stabilno žarišče



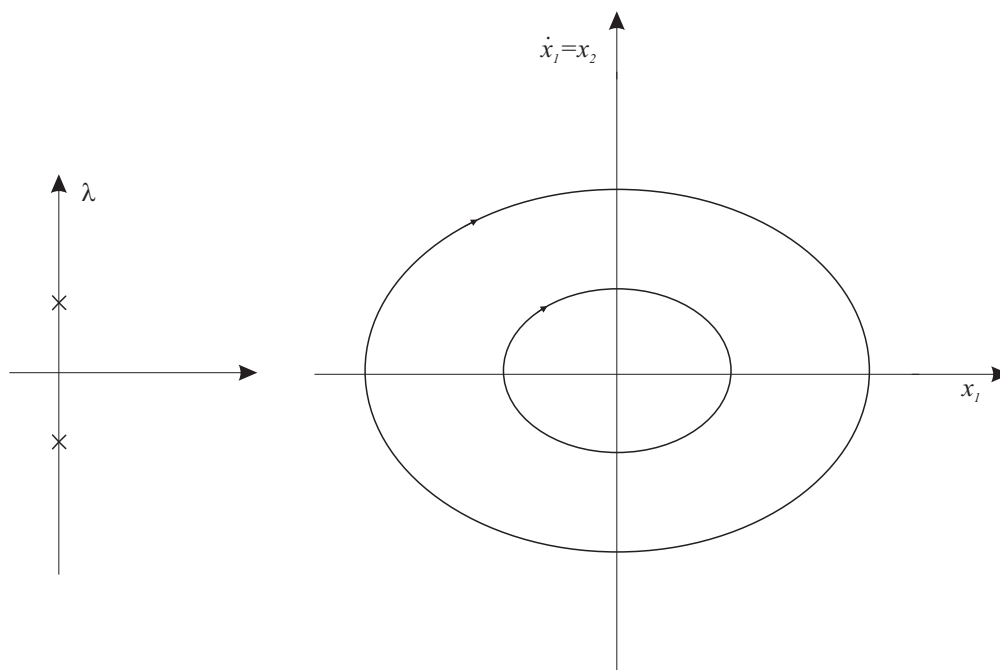
Slika 4.8: Nestabilno vozlišče



Slika 4.9: Nestabilno žarišče



Slika 4.10: Sedlo



Slika 4.11: Središče

## 4.5 Določevanje stabilnosti po metodi Ljapunova

Doslej smo že srečali definicijo stabilnosti BIBO, ki temelji na proučevanju odziva na enotin impulz, Routhov stabilnostni kriterij, ki temelji na proučevanju karakterističnega polinoma ter Nyquistov kriterij, ki temelji na proučevanju frekvenčne karakteristike odprtozančnega sistema. V tem delu si bomo ogledali metodo, ki temelji na zapisu v prostoru stanj in je uporabna za linearne in nelinearne sisteme. Razvil jo je A.M. Ljapunov konec prejšnjega stoletja (1892). Osvetlili bomo le nekatere zaključke teoretično precej zahtevne problematike. Natančnejša obravnava presega okvir tega dela.

### Definicije stabilnosti

Analiza stabilnosti se nanaša na avtonomni sistem



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.53)$$

Predpostavimo, da so enačbe preurejene tako, da se ravnotežna točka nahaja v koordinatnem izhodišču, torej je  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  oz.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Ravnatežna točka  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  je *stabilna v smislu Ljapunova*, če za kakršen koli začetni pogoj znotraj omejenega področja okoli ravnotežne točke trajektorija ostane znotraj drugega omejenega področja. Bolj eksaktno povedano je točka  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  stabilna ravnotežna točka, če je za vsako pozitivno število  $\varepsilon$  možno najti pozitivno število  $\delta$ , tako da velja

$$\text{če} \quad \|\mathbf{x}(0)\| < \delta \quad (4.54)$$

potem

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{za vse } t \quad (4.55)$$

Pri tem je

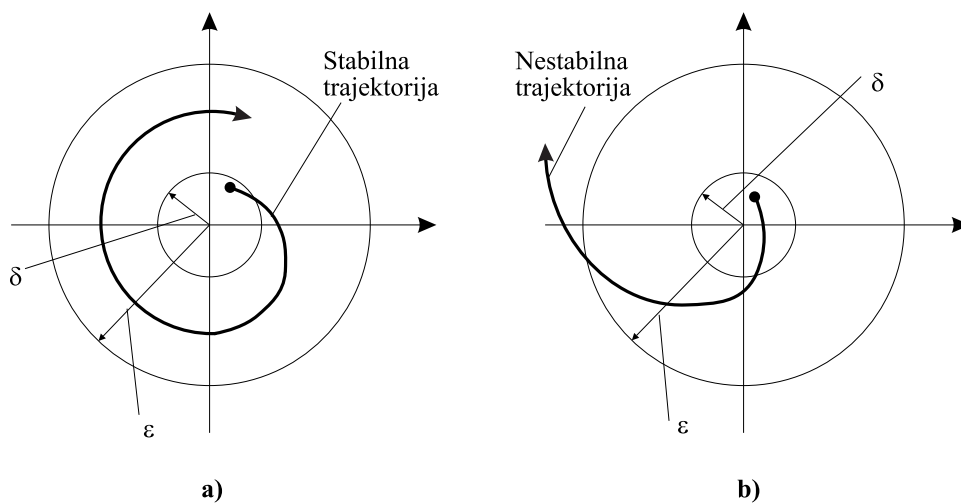
$$\|\mathbf{x}(t)\| = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4.56)$$

norma oz. merilo za velikost vektorja stanj  $\mathbf{x}(t)$ .

Slika 4.12 prikazuje primer stabilne in nestabilne ravnotežne točke oz. sistema.

Ravnatežna točka je *asimptotično stabilna*, če velja stabilnost v smislu Ljapunova, dodatni pogoj pa je, da se trajektorija zaključi v ravnotežni točki, ko gre  $t \rightarrow \infty$  (pri tem ne zapusti območja, ki je določeno z  $\varepsilon$ ). Primer asimptotično stabilne točke prikazuje slika 4.13.

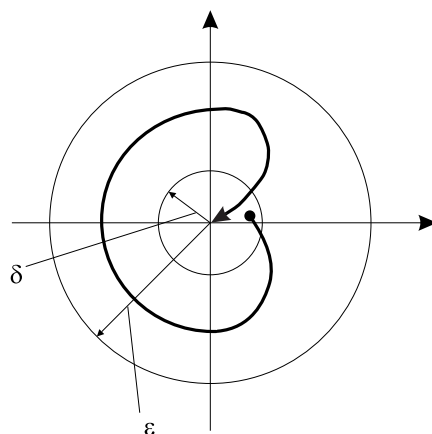
Ravnatežna točka je *globalno asimptotično stabilna*, če velja asimptotična stabilnost za kakršenkoli začetni pogoj ( $0 \leq \delta < \infty$ ). Linearni časovno nespremenljivi sistem je globalno asimptotično stabilen, če so vse lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$  (koreni enačbe  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ ) z negativnimi realnimi deli.



Slika 4.12: Definicija stabilnosti v smislu Ljapunova

a) stabilna ravnotežna točka

b) nestabilna ravnotežna točka



Slika 4.13: Asimptotično stabilna ravnotežna točka

### Funkcija Ljapunova

Za določitev stabilnosti je Ljapunov vpeljal *skalarno funkcijo*  $V(\mathbf{x})$ , ki ima lastnosti "energije" v sistemu, vendar je dosti bolj splošna. Dokazal je, da v primeru, če ta "energija" postaja manjša, postane končno enaka nič in sistem ostane v mirovanju. Lastnosti Ljapunove skalarne funkcije so naslednje

1.  $V(\mathbf{0}) = 0$
2.  $V(\mathbf{x}) > 0 \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0$
3.  $V(\mathbf{x})$  je zvezna in ima zvezne odvode z ozirom na vse komponente  $\mathbf{x}$
4.  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  vzdolž trajektorije

Lastnosti 1 in 2 določata t.i. pozitivno definitnost skalarne funkcije  $V(\mathbf{x})$ . Pomenita, da ima sistem pozitivno "energijo" za vsako stanje različno od nič in enako nič v stanju nič (v ravnotežni točki). Lastnost 3 pomeni, da je funkcija  $V(x)$  zvezna in zvezno odvedljiva, lastnost 4 pa zagotavlja, da energija sistema upada glede na začetno stanje. Če v lastnosti 4 velja le neenačaja, potem gre trajektorija v koordinatno izhodišče. Lastnost 4 določa t.i. semi negativno definitnost skalarne funkcije  $\dot{V}(\mathbf{x})$ .

### Stabilnostni teorem

Če za sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.57)$$

obstaja skalarne funkcije Ljapunova, potem koordinatno izhodišče predstavlja stabilno ravnotežno točko.

Če velja  $\dot{V} < 0$ , potem je koordinatno izhodišče asimptotično stabilna ravnotežna točka.

Če dodatno velja  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  če  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , je ravnotežna točka globalno asimptotično stabilna.

**Primer 4.3** Nelinearni sistem opisujeta enačbi stanj

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \quad (4.58)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (4.59)$$

Ker koordinatno izhodišče  $x_1 = 0, x_2 = 0$  določa edino ravnotežno točko ( $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ), ni potrebna nikakršna transformacija koordinat.

Izberimo pozitivno definitno skalarno funkcijo

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \quad (4.60)$$

tako da velja  $V(\mathbf{0}) = 0, V(\mathbf{x}) > 0$ , če  $\|\mathbf{x}\| = x_1^2 + x_2^2 > 0$ . Ker je odvod skalarne funkcije

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

negativno definitna funkcija, saj velja  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ , če  $\|\mathbf{x}\| = x_1^2 + x_2^2 > 0$ , je torej  $V(\mathbf{x})$  Ljapunova funkcija. Ker velja tudi  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , če  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , predstavlja koordinatno izhodišče globalno asimptotično stabilno ravnotežno točko.  $\square$

### Stabilnost linearnih sistemov

Določitev stabilnosti linearnih sistemov po metodi Ljapunova je nekoliko enostavnejša predvsem v smislu izbire skalarne funkcije  $V(\mathbf{x})$ . Če izberemo skalarno funkcijo v obliki

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4.62)$$

kjer je  $\mathbf{P}$  simetrična pozitivno definitna (Hermitska) matrika (determinante  $n$  glavnih minorjev pozitivne),<sup>1</sup> potem velja ob upoštevanju  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{d}{dt} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \\ &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Sylvestrov kriterij

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{Ax})^T \mathbf{Px} + \mathbf{x}^T \mathbf{PAx} = \\
&= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{PA}) \mathbf{x} = \\
&= -\mathbf{x}^T \mathbf{Qx}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

kjer je

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q} \tag{4.64}$$

Ljapunov je dokazal, da je za vsako pozitivno definitno matriko  $\mathbf{Q}$  in s tem negativno definitno skalarno funkcijo  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , matrika  $\mathbf{P}$ , ki odgovarja enačbi (4.64) tudi pozitivno definitna in je torej skalarna funkcija  $V(\mathbf{x})$  pozitivno definitna, če je sistem asimptotično stabilen. Zato lahko izberemo  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , t.j. najenostavnejšo pozitivno definitno matriko, nato pa z rešitvijo sistema enačb (enačba 4.64) določimo elemente matrike  $\mathbf{P}$  in preverimo, če je le ta pozitivno definitna. Če je, je sistem asimptotično stabilen.

**Primer 4.4** Sistem 2. reda opisuje enačba

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{4.65}$$

Z izbiro  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  določimo matriko  $\mathbf{P}$  iz enačbe

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{I} \tag{4.66}$$

oz.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Iz tega določimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
-2p_{12} &= -1 \\
p_{11} - p_{12} - p_{22} &= 0 \\
2p_{12} - 2p_{22} &= -1
\end{aligned} \tag{4.68}$$

oz.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Matrika  $P$  je pozitivno definitna, saj velja

$$\frac{3}{2} > 0 \quad \left| \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right| > 0 \quad (4.70)$$

Sistem je globalno asimptotično stabilen. Ljapunova funkcija je

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) = x_1^2 + \frac{1}{2}[x_2^2 + (x_1 + x_2)^2] \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (4.71)$$

□

## 4.6 Transformacija spremenljivk stanj

Često se zgodi, da spremenljivke stanj, ki smo jih dobili pri določeni formulaciji problema (pri modeliranju) niso tako primerne kot kakšne druge spremenljivke stanj. Namesto da se lotimo ponovnega modeliranja z določenimi spremembami, je možno, da isto dosežemo s transformacijo že dobljenih matrik  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{D}$  in stanja  $\mathbf{x}(t)$  v neke matrike  $\mathbf{A}_t$ ,  $\mathbf{B}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$  in  $\mathbf{D}_t$  in stanje  $\mathbf{x}_t(t)$  s pomočjo linearne transformacije  $\mathbf{T}$ . Le-ta je nesingularna, običajno konstantna matrika. Z enačbo

$$\mathbf{x}_t(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (4.72)$$

je določen vektor stanj  $\mathbf{x}_t(t)$  v novi (transformirani) obliki,  $\mathbf{x}(t)$  pa je prvotni vektor stanj. Ker je originalni sistem zapisan z enačbama

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.73)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (4.74)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

dobimo z upoštevanjem enačb (4.72), (4.73) in (4.74)

$$\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_t(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}_t(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.75)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}_t(t) + D u(t) \quad (4.76)$$

$$\mathbf{x}_t(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$

oz.

$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}_t(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u(t) = \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t(t) + \mathbf{B}_t u(t) \quad (4.77)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}_t(t) + D u(t) = \mathbf{C}_t\mathbf{x}_t(t) + D_t u(t) \quad (4.78)$$

Torej so transformirane matrike

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad \mathbf{B}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}_t = \mathbf{C}\mathbf{T} \quad D_t = D \quad (4.79)$$

*Transformirani sistem predstavlja povsem ekvivalenten sistem originalnemu sistemu s stališča vhodno izhodnih relacij, medtem ko se spremenljivke stanj seveda obnašajo drugače. Sistemu torej ne spremenimo prenosne funkcije in seveda tudi ne karakteristične enačbe (lastnih vrednosti). Z ustrezno izbiro transformacijske matrike  $\mathbf{T}$  lahko prevedemo poljuben sistem zapisan v prostoru stanj v t.i. *standardne* ali *kanonične oblike*. Le te so zlasti pomembne v določenih načrtovalnih postopkih, saj lahko precej poenostavijo postopek (npr. načrtovanje regulatorjev, observatorjev, ...).*

## 4.7 Kanonične oblike

Sistem, ki je zapisan v prostoru stanj, se zelo enostavno prevede v prenosno funkcijo s pomočjo enačbe

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \quad (4.80)$$

Velikokrat pa se zahteva obraten postopek, torej pretvorbo iz prenosne funkcije v prostor stanj, saj so številne sodobne metode načrtovanja kakor tudi simulacije

sistemov osnovane na tem zapisu. Pretvorba iz prenosne funkcije v prostor stanj pa ni enolična. V tem poglavju si bomo ogledali, kako pretvoriti prenosno funkcijo (oz. ustrezno diferencialno enačbo) v različne *standardne* oz. *kanonične* zapise.

S simulacijskim pristopom lahko ponavadi relativno enostavno pridemo do kanoničnih oblik in se izognemo bolj zahtevnim postopkom, ki omogočajo iz nekega poljubnega zapisa v prostoru stanj preiti v kanonično obliko s pomočjo transformacij (matrike  $\mathbf{T}$ ).

### 4.7.1 Vodljivostna kanonična oblika

Sistem, ki ga opisuje prenosna funkcija

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (4.81)$$

prevedemo v *vodljivostno kanonično obliko*, če uporabimo t.i. *delitveni postopek* (partitioned form method) za simulacijo prenosne funkcije. Prenosno funkcijo razdelimo v dve prenosni funkciji

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} \frac{Y(s)}{W(s)} \quad (4.82)$$

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (4.83)$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n \quad (4.84)$$

Prvo prenosno funkcijo realiziramo (simuliramo) s t.i. indirektnim načinom, kjer enačbo (4.83) zapišemo v obliko

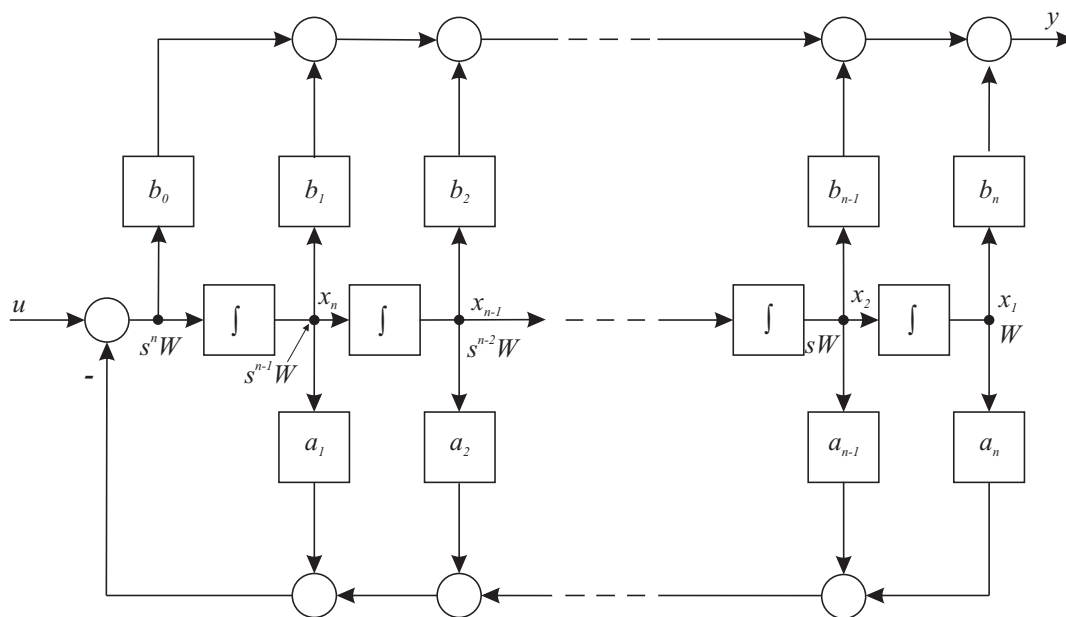
$$s^n W = -a_1 s^{n-1} W - \dots - a_{n-1} s W - a_n W + U \quad (4.85)$$

Enačbo (4.84) pa zapišemo v obliko



$$Y(s) = b_0 s^n W + b_1 s^{n-1} W + \dots + b_{n-1} s W + b_n W \quad (4.86)$$

Simulacijsko (realizacijsko) shemo prikazuje slika 4.14.



Slika 4.14: Vodljivostna kanonična oblika

Spremenljivke stanj izberemo na izhodih integratorjev in jih označimo z desne proti levi. Slika 4.14 nazorno prikazuje odvisnost odvodov spremenljivk stanj od spremenljivk stanj in vhodnega signala. Za izhodno enačbo pa enačbo (4.86) s pomočjo slike 4.14 preoblikujemo v

$$y(t) = (b_n - a_n b_0)x_1(t) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)x_2(t) + \dots + (b_1 - a_1 b_0)x_n + b_0 u \quad (4.87)$$

Torej je zapis v prostoru stanj v vodljivostni kanonični obliki

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.88)$$

$$y(t) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0] \mathbf{x}(t) + b_0 u \quad (4.89)$$

Matrika  $\mathbf{A}$  ima t.i. *Frobeniusovo obliko* (companion oblika), matrika  $\mathbf{B}$  ima obliko stolpnega vektorja s samimi ničlami razen enke na koncu, za matriko  $\mathbf{C}$  pa ni posebnih zahtev.

Vodljivostna oblika je zlasti primerna za načrtovanje regulatorja stanj.

### 4.7.2 Spoznavnostna kanonična oblika

Sistem, ki ga opisuje prenosna funkcija

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (4.90)$$

prevedemo v *spoznavnostno kanonično obliko*, če uporabimo t.i. *vgnezdeno metodo* (nested form method) za realizacijo (simulacijo) prenosne funkcije. Z navzkrižnim množenjem enačbe (4.90) dobimo

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)Y = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n)U \quad (4.91)$$

Združimo člene z enako potenco

$$s^n(Y - b_0 U) + s^{n-1}(a_1 Y - b_1 U) + \dots + s(a_{n-1} Y - b_{n-1} U) + (a_n Y - b_n U) = 0 \quad (4.92)$$

Enačbo (4.92) delimo z  $s^n$ , da na levi ostane le  $Y$

$$Y = b_0 U - \frac{1}{s}(a_1 Y - b_1 U) - \dots - \frac{1}{s^{n-1}}(a_{n-1} Y - b_{n-1} U) - \frac{1}{s^n}(a_n Y - b_n U) \quad (4.93)$$

in jo napišemo v vgnezdjeni obliki

$$Y = b_0 U + \frac{1}{s} \{ (b_1 U - a_1 Y) + \dots + \frac{1}{s} [(b_{n-1} U - a_{n-1} Y) + \frac{1}{s} (b_n U - a_n Y)] \} \quad (4.94)$$

Izberemo spremenljivke stanj

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{s} [b_n U - a_n Y] \\ X_2 &= \frac{1}{s} [(b_{n-1} U - a_{n-1} Y) + X_1] \\ &\vdots \\ X_n &= \frac{1}{s} [(b_1 U - a_1 Y) + X_{n-1}] \end{aligned} \quad (4.95)$$

Izhod določa enačba

$$Y = b_0 U + X_n \quad (4.96)$$

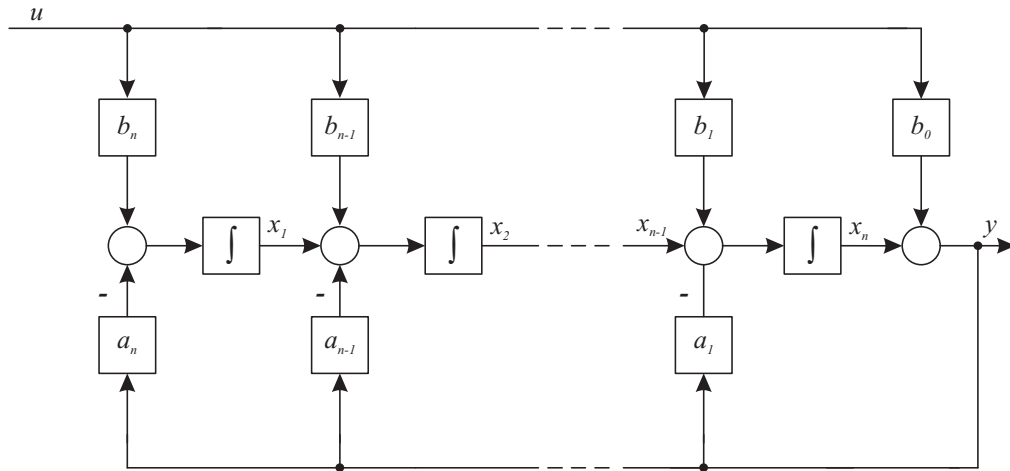
Shemo za realizacijo (simulacijo) prikazuje slika 4.15.

Spremenljivke stanj so ponovno izhodi integratorjev, vendar tokrat v smeri od leve proti desni.

Za zapis v prostoru stanj vstavimo enačbo (4.96) v enačbo (4.95) ter pomnožimo vse enačbe z  $s$ .

$$\begin{aligned} sX_1 &= -a_n X_n + (b_n - a_n b_0) U \\ sX_2 &= X_1 - a_{n-1} X_n + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) U \\ &\vdots \\ sX_n &= X_{n-1} - a_1 X_n + (b_1 - a_1 b_0) U \end{aligned} \quad (4.97)$$

Torej je zapis v prostoru stanj v spoznavnostni kanonični obliki



Slika 4.15: Spreiznostna kanonična oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.98)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathbf{x}(t) + b_0 u(t) \quad (4.99)$$

Matrika  $\mathbf{A}$  je *transponirana Frobeniusova matrika*. Za matriko  $\mathbf{B}$  ni posebnih zahtev, matrika  $\mathbf{C}$  pa je v obliki vrstičnega vektorja s samimi ničlami razen enice na zadnjem mestu. Spreiznostna oblika je zlasti primerna pri načrtovanju observatorjev.

### 4.7.3 Diagonalna in Jordanova kanonična oblika

Do te kanonične oblike pridemo, če prenosno funkcijo razvrstimo v parcialne ulomke

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)} = \quad (4.100)$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

$\lambda_i$  so poli sistema oz. lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$ . Predpostavljamo, da so različni. Enačbo (4.100) lahko zapišemo v obliko

$$Y = b_0 U + \frac{c_1}{s - \lambda_1} U + \frac{c_2}{s - \lambda_2} U + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} U \quad (4.101)$$

Definiramo spremenljivke stanj

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s - \lambda_1} U(s) \\ X_2(s) &= \frac{1}{s - \lambda_2} U(s) \\ &\vdots \\ X_n(s) &= \frac{1}{s - \lambda_n} U(s) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Enačbe (4.102) preuredimo v obliko

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= \lambda_1 X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) &= \lambda_2 X_2(s) + U(s) \\ &\vdots \\ sX_n(s) &= \lambda_n X_n(s) + U(s) \end{aligned} \quad (4.103)$$

Izhodni signal pa je

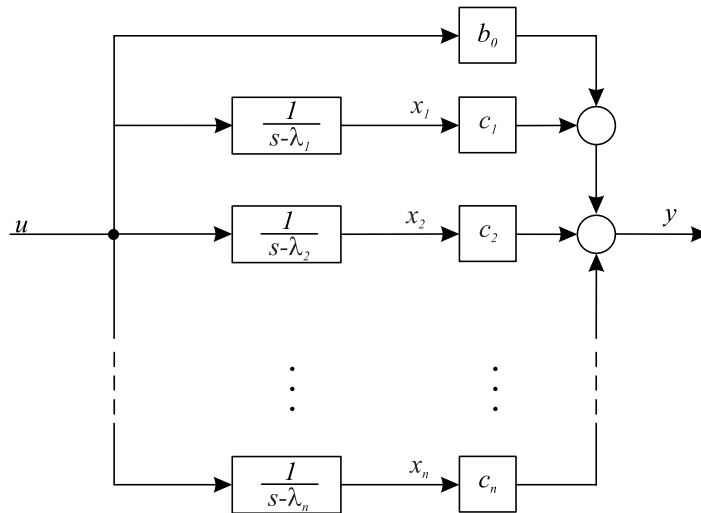
$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n + b_0 U \quad (4.104)$$

Enačbe (4.103) in (4.104) določajo zapis v *diagonalni kanonični obliki*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.105)$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \mathbf{x}(t) + b_0 u(t) \quad (4.106)$$

Bločno shemo prikazuje slika 4.16.



Slika 4.16: Bločna shema za realizacijo (simulacijo) v diagonalni kanonični obliki

Če vsebuje sistem več enakih lastnih vrednosti, potem ga ni možno zapisati v prej obravnavani diagonalni obliki, ampak v t.i. *Jordanovi obliki*. Predpostavimo sistem n-tega reda s tremi enakimi lastnimi vrednostmi

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s - \lambda_1)^3 (s - \lambda_4) (s - \lambda_5) \dots (s - \lambda_n)} \quad (4.107)$$

Razvrstitev na parcialne ulomke ima v tem primeru obliko

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s - \lambda_1)^3} + \frac{c_2}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_3}{s - \lambda_1} + \frac{c_4}{s - \lambda_4} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \quad (4.108)$$

Če izrazimo  $Y(s)$ , dobimo

$$Y(s) = b_0 U + \frac{c_1}{(s - \lambda_1)^3} U + \frac{c_2}{(s - \lambda_1)^2} U + \frac{c_3}{s - \lambda_1} U + \frac{c_4}{s - \lambda_4} U + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} U \quad (4.109)$$

Definirajmo

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{(s - \lambda_1)^3} U \\ X_2 &= \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} U \\ X_3 &= \frac{1}{s - \lambda_1} U \\ X_4 &= \frac{1}{s - \lambda_4} U \\ &\vdots \\ X_n &= \frac{1}{s - \lambda_n} U \end{aligned} \quad (4.110)$$

Ker veljajo prenosne funkcije

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{X_2} &= \frac{1}{s - \lambda_1} \\ \frac{X_2}{X_3} &= \frac{1}{s - \lambda_1} \end{aligned} \quad (4.111)$$

dobimo iz zgornjih enačb

$$\begin{aligned} sX_1 &= \lambda_1 X_1 + X_2 \\ sX_2 &= \lambda_1 X_2 + X_3 \\ sX_3 &= \lambda_1 X_3 + U \\ sX_4 &= \lambda_4 X_4 + U \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ sX_n = \lambda_n X_n + U \end{array}$$

Izhodna enačba pa je

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 + \dots + c_n X_n + b_0 U \quad (4.113)$$

Torej je zapis v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.114)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \mathbf{x}(t) + b_0 u(t) \quad (4.115)$$

Za Jordanovo kanonično obliko je značilno, da se pojavljajo v sistemski matriki enice tudi nad glavno diagonalo. Tem delom matrike (označeno črtkano) pravimo Jordanovi bloki. Slika 4.17 prikazuje bločno shemo za realizacijo v Jordanovi kanonični obliki.

**Primer 4.5** Zapišite sistem s prenosno funkcijo

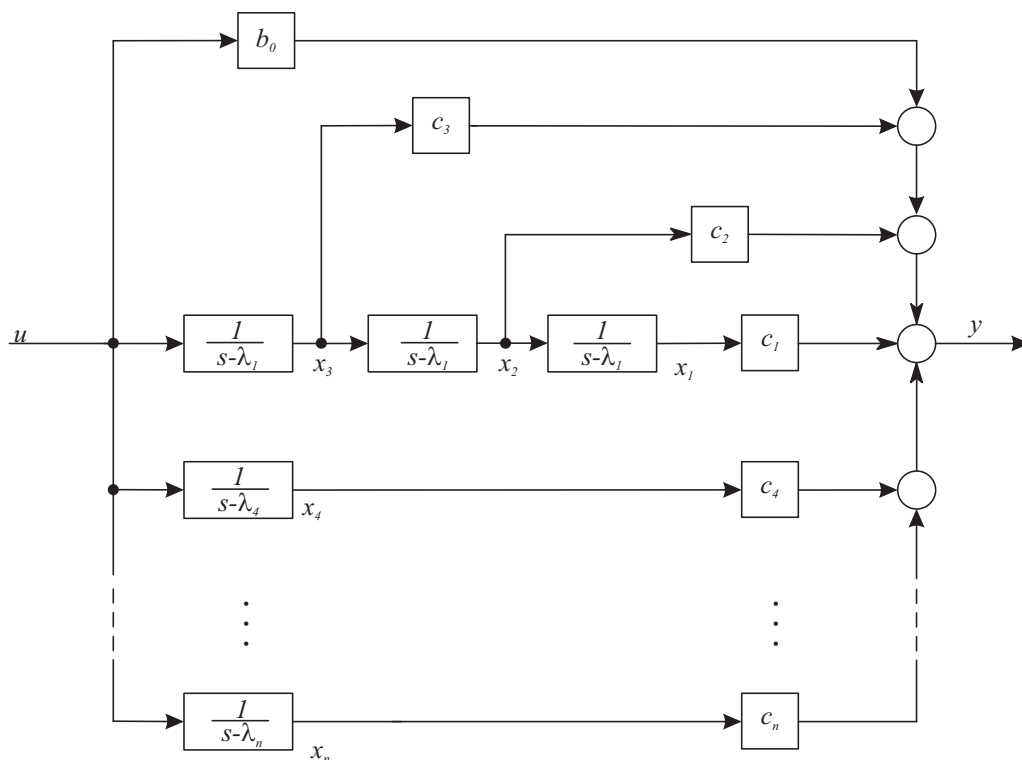
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \quad (4.116)$$

v različne kanonične oblike.

Vodljivostna kanonična oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.117)$$





Slika 4.17: Bločna shema za realizacijo v Jordanovi kanonični obliki

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.118)$$

Spoznavnostna kanonična oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.119)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.120)$$

Diagonalna kanonična oblika

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \quad (4.121)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.122)$$

$$y(t) = [2 \quad -1] \mathbf{x}(t) \quad (4.123)$$

□

#### 4.7.4 Transformacija sistema v diagonalno kanonično obliko

Sistem, ki ga opisuje enačba

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.124)$$

naj ima  $n$  različnih lastnih vrednosti. Poiščemo transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$ , ki transformira sistem v diagonalno obliko

$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}_t(t) + \mathbf{B}_t u(t) \quad (4.125)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Velja torej

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (4.127)$$

oz.

$$\mathbf{T} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (4.128)$$

Iz obravnave lastnih vektorjev matrike  $\mathbf{A}$  je znano, da le ti zadovoljijo enačbi

$$\Theta \Lambda = A \Theta \quad (4.129)$$

oz.

$$\lambda_i \vartheta_i = A \vartheta_i \quad (4.130)$$

kjer je

$$\Theta = [\vartheta_1 \vartheta_2 \dots \vartheta_n] \quad (4.131)$$

matrika lastnih vektorjev,  $\lambda_i$  pa  $i$ -ta lastna vrednost.

S primerjavo enačb (4.128) in (4.129) vidimo, da je transformacijska matrika  $T$  kar enaka matriki lastnih vektorjev  $\Theta$ . Če ima matrika  $A$  Frobeniusovo obliko, je transformacijska matrika posebej enostavna

$$T = \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Matrike  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$  ter vektor  $\mathbf{x}(t)$  se transformirajo v matrike  $A_t = \Lambda$ ,  $B_t$ ,  $C_t$ ,  $D_t$  ter vektor  $\mathbf{x}_t(t)$  po enačbah (4.72) in (4.79).

**Primer 4.6** Sistem v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.133)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \quad (4.134)$$

zapišimo v diagonalno obliko.

Lastne vrednosti določimo iz enačbe

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (4.135)$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 1 \quad (4.136)$$

Lastna vektorja določimo iz enačb

$$\begin{aligned} \lambda_1 \boldsymbol{\vartheta}_1 &= \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}_1 \\ \lambda_2 \boldsymbol{\vartheta}_2 &= \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}_2 \end{aligned} \quad (4.137)$$

Torej velja

$$2 \begin{bmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{21} \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

Sistem dveh enačb omogoča poljubno izbiro  $\vartheta_{11}$ , zato lahko izberemo tudi 1

$$\boldsymbol{\vartheta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

Iz enačbe

$$\begin{bmatrix} \vartheta_{12} \\ \vartheta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{12} \\ \vartheta_{22} \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

pa določimo

$$\boldsymbol{\vartheta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

pri čemer smo izbrali  $\vartheta_{22} = 1$ .

Včasih lastne vektorje tudi normiramo, tako da je vsota kvadratov elementov enaka 1. V takem primeru sta lastna vektorja

$$\boldsymbol{\vartheta}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\vartheta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

Transformacijska matrika je torej

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

transformirane matrike pa so

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{\Lambda} &= \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_t &= \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{C}_t &= \boldsymbol{C} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.144)$$

□

#### 4.7.5 Transformacija sistema v Jordanovo kanonično obliko

V splošnem matrike  $\boldsymbol{A}$  ni možno diagonalizirati, če vsebuje večkratne lastne vrednosti razen v primeru realne simetrične matrike  $\boldsymbol{A}$ . Obstaja pa transformacija, ki prevede matriko  $\boldsymbol{A}$  v t.i. Jordanovo obliko

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} \quad (4.145)$$

tako da je matrika  $\boldsymbol{J}$  "pretežno" diagonalna. Obliki sistema, ki je zapisan z Jordanovo matriko  $\boldsymbol{J}$ , pravimo *Jordanova kanonična oblika*. Tipični obliki Jordanove matrike sta

$$\mathbf{J} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right] \quad \mathbf{J} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array} \right] \quad (4.146)$$

Jordanova matrika  $\mathbf{J}$  ima naslednje lastnosti:

1. Elementi na glavni diagonali so lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$ .
2. Vsi elementi pod glavno diagonalo so nič.
3. Nekateri elementi tik nad glavno diagonalo so enaki 1.
4. Enke skupaj z lastnimi vrednostmi oblikujejo t.i. Jordanove bloke, ki so prikazani s črtkanimi črtami.
5. Če ima nesimetrična matrika  $\mathbf{A}$  večkratne lastne vrednosti, potem njeni lastni vektorji niso linearno neodvisni. Označimo, da ima matrika  $\mathbf{A}$  reda  $n \times n$   $r$  linearno neodvisnih vektorjev ( $r < n$ ).
6. Število Jordanovih blokov je enako številu linearno neodvisnih lastnih vektorjev  $r$ . Vsakemu Jordanovemu bloku pripada natanko en linearno neodvisni lastni vektor.
7. Število enic nad glavno diagonalo je  $n - r$ .

Transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$  določimo na naslednji način:

Predpostavimo, da ima matrika  $\mathbf{A}$   $q$  različnih lastnih vrednosti med  $n$  lastnimi vrednostmi. Lastne vektorje, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, določimo na običajen način

$$\lambda_i \boldsymbol{\vartheta}_i = \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}_i \quad (4.147)$$

oz.

$$(\lambda_i - \mathbf{A}) \boldsymbol{\vartheta}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.148)$$

Lastne vektorje, ki pripadajo Jordanovemu bloku  $m \times m$  ( $m$  kratna lastna vrednost  $\lambda_j$ )

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (4.149)$$

določimo iz enačbe

$$\mathbf{\Theta} \mathbf{J}_j = \mathbf{A} \mathbf{\Theta} \quad (4.150)$$

oz.

$$[\boldsymbol{\vartheta}_1 \quad \boldsymbol{\vartheta}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\vartheta}_m] \mathbf{J}_j = \mathbf{A} [\boldsymbol{\vartheta}_1 \quad \boldsymbol{\vartheta}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\vartheta}_m] \quad (4.151)$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} \lambda_j \boldsymbol{\vartheta}_1 &= \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}_1 \\ \boldsymbol{\vartheta}_1 + \lambda_j \boldsymbol{\vartheta}_2 &= \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}_2 \\ \boldsymbol{\vartheta}_2 + \lambda_j \boldsymbol{\vartheta}_3 &= \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}_3 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\vartheta}_{m-1} + \lambda_j \boldsymbol{\vartheta}_m &= \mathbf{A} \boldsymbol{\vartheta}_m \end{aligned} \quad (4.152)$$

Vektorje  $\boldsymbol{\vartheta}_1, \boldsymbol{\vartheta}_2, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_m$ , ki pripadajo  $j$ -temu Jordanovemu bloku (med sabo so linearno odvisni), določimo iz enačb

$$\begin{aligned} (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \boldsymbol{\vartheta}_1 &= 0 \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \boldsymbol{\vartheta}_2 &= -\boldsymbol{\vartheta}_1 \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \boldsymbol{\vartheta}_3 &= -\boldsymbol{\vartheta}_2 \\ &\vdots \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \boldsymbol{\vartheta}_m &= -\boldsymbol{\vartheta}_{m-1} \end{aligned} \quad (4.153)$$

**Primer 4.7** Prevedite matriko

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

v Jordanovo obliko.

Matrika  $\mathbf{A}$  ima lastne vrednosti

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda_1 = 2 \text{ in } \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad (4.155)$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti  $\lambda_1 = 2$  določimo na standardni način

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\vartheta}_1 = 0 \quad (4.156)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{21} \\ \vartheta_{31} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.157)$$

S poljubno izbiro  $\vartheta_{11} = 2$  morata biti elementa  $\vartheta_{21} = -1$ ,  $\vartheta_{31} = -2$ , torej je lastni vektor

$$\boldsymbol{\vartheta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

Za lastno vrednost  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  določimo dva linearno odvisna vektorja  $\boldsymbol{\vartheta}_2$  in  $\boldsymbol{\vartheta}_3$  iz enačb

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\vartheta}_2 = 0 \quad (4.159)$$

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\vartheta}_3 = -\boldsymbol{\vartheta}_2 \quad (4.160)$$

Prva enačba ima obliko



$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{12} \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{32} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.161)$$

Z izbiro  $\vartheta_{12} = 1$  sta  $\vartheta_{22} = -\frac{3}{7}$ ,  $\vartheta_{32} = -\frac{5}{7}$ , torej je lastni vektor  $\boldsymbol{\vartheta}_2$

$$\boldsymbol{\vartheta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \quad (4.162)$$

Druga enačba ima obliko

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{13} \\ \vartheta_{23} \\ \vartheta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

iz česar dobimo lastni vektor

$$\boldsymbol{\vartheta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{46}{49} \end{bmatrix} \quad (4.164)$$

in s tem transformacijsko matriko

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} \\ -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

Jordanovo matriko pa dobimo s pomočjo transformacije matrike  $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

Ker sta dva neodvisna lastna vektorja, imamo dva Jordanova bloka, nad glavno diagonalo pa eno enico ( $n - r = 3 - 2 = 1$ ).  $\square$

## 4.8 Vodljivost in spoznavnost sistemov

Pojma vodljivost in spoznavnost sistemov imata zelo pomembno vlogo pri načrtovanju regulacijskih sistemov.

Vodljivost sistema je bistvenega pomena, da sploh lahko načrtamo ustrezno regulacijo, saj zagotavlja, da regulirna veličina lahko deluje na vsa stanja sistema, ki ga regulira. Spoznavnost sistema pa pomeni, da vse spremenljivke stanja delujejo na izhod. To je zelo pomembno, ko načrtujemo regulatorje stanj, ki potrebujejo za delovanje spremenljivke stanja. Ker le teh včasih ni možno meriti ali pa so meritve zelo drage, s pomočjo observatorjev iz merjenih izhodov določimo spremenljivke stanja. To pa je možno le v primeru, če je sistem spoznaven.

Večina fizikalnih sistemov je vodljivih in spoznavnih, kaj lahko pa se zgodi, da to ne velja za njihove modele, ki jih uporabljamo pri načrtovanju regulacijskih sistemov.

### 4.8.1 Vodljivost sistemov

Sistem je vodljiv v smislu spremenljivk stanja, če je možno z neomejenim vhodnim signalom začetno stanje  $\mathbf{x}(t_0)$  pripeljati v končno stanje  $\mathbf{x}(t_1)$  v končnem časovnem intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Vodljive sisteme je možno zapisati v vodljivostni kanonični obliki.

Pogoj za vodljivost izpeljemo iz časovnega odziva sistema zapisanega v prostoru stanj, pri čemer predpostavimo končno stanje  $\mathbf{x}(t_1) = 0$

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = 0 \quad (4.167)$$

Enačbo (4.167) je možno izpolniti samo v primeru, če ima matrika

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.168)$$

rang enak  $n$ , t.j. redu matrike  $\mathbf{A}$ , oz. če je sestavljena iz  $n$  linearno neodvisnih vektorjev

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_v) = n \quad (4.169)$$

$\mathbf{Q}_v$  je *vodljivostna matrika*. Pri sistemih z enim vhodom je potreben in zadosten pogoj za vodljivost, da je matrika  $\mathbf{Q}_v$  nesingularna, torej da velja

$$\det(\mathbf{Q}_v) \neq 0 \quad (4.170)$$

Vodljivost sistema se običajno lepo vidi iz bločnih (simulacijskih) shem. Pri sistemih, ki niso vodljivi, se opazi, da z vhodnim signalom ni možno delovati na določeno stanje. Ker so pri diagonalni kanonični obliki stanja odvisna le od vhodnega signala, ne pa od povezav med stanji, je zato to zelo primerna oblika za proučevanje vodljivosti.

### Študij vodljivosti s pomočjo diagonalne ali Jordanove kanonične oblike

Sisteme, ki imajo različne lastne vrednosti, je možno zelo enostavno pretvoriti v diagonalno obliko s pomočjo transformacijske matrike  $\mathbf{T} = \mathbf{\Theta}$ , kjer je  $\mathbf{\Theta}$  matrika lastnih vektorjev.

$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_t(t) + \mathbf{B}_t u(t) \quad (4.171)$$

Ker lahko enačbo (4.171) zapišemo z enačbami

$$\dot{x}_{t1}(t) = \lambda_1 x_{t1}(t) + b_{t1} u(t) \quad (4.172)$$

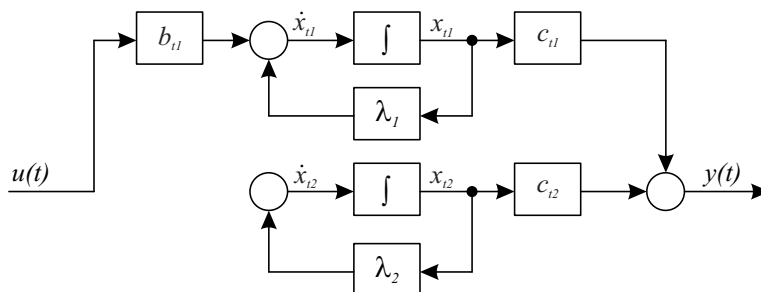
$$\dot{x}_{t2}(t) = \lambda_2 x_{t2}(t) + b_{t2} u(t) \quad (4.173)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{tn}(t) = \lambda_n x_{tn}(t) + b_{tn} u(t) \quad (4.174)$$

je očitno, da lahko vhodni signal  $u(t)$  deluje na vsako spremenljivko stanja v  $\mathbf{x}_t(t)$  le v primeru, če vektor  $\mathbf{B}_t$  ne vsebuje nobene ničle. Pogoje velja tudi za sisteme z več vhodi. V tem primeru je  $\mathbf{B}_t$  matrika in nobena njena vrstica ne sme biti v celoti nič.

Primer nevodljivega sistema prikazuje slika 4.18.



Slika 4.18: Nevodljiv sistem v diagonalni obliki

V primeru, ko vse lastne vrednosti med seboj niso različne, lahko proučujemo vodljivost s pomočjo Jordanove kanonične oblike. V tem primeru je sistem vodljiv, če vrstica v matriki  $\mathbf{B}_t$ , ki pripada zadnji vrstici Jordanovega bloka, ni enaka nič. Razlog je v tem, da zadnja vrstica vsakega Jordanovega bloka ustreza tisti enačbi stanja, ki kaže le na povezanost tistega stanja z vhom, ne pa z ostalimi stanji.

**Primer 4.8** Ali je sistem

$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}_t(t) \quad (4.175)$$

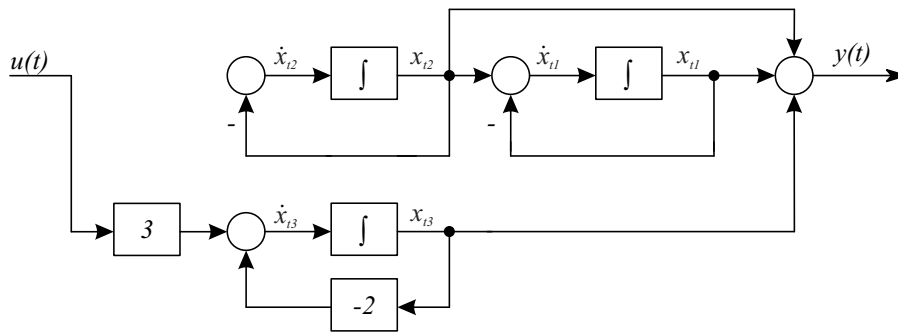
vodljiv?

Ker je druga vrstica matrike  $\mathbf{B}_t$  enaka 0 (zadnja vrstica, ki pripada prvemu Jordanovemu bloku), je sistem nevodljiv. To je razvidno tudi iz ustrezne bločne (simulacijske) sheme. Zgornjo matrično enačbo napišemo z enačbami

$$\dot{x}_{t1}(t) = -x_{t1}(t) + x_{t2}(t) \quad (4.176)$$

$$\dot{x}_{t2}(t) = -x_{t2}(t) \quad (4.177)$$

$$\dot{x}_{t3}(t) = -2x_{t3}(t) + 3u(t) \quad (4.178)$$



Slika 4.19: Nevodljiv sistem v Jordanovi kanonični obliki

Ugotovitev lahko potrdimo tudi z izračunom vodljivostne matrike

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

$$\det(\mathbf{Q}_v) = 0 \quad (4.180)$$

Ker je determinanta matrike  $\mathbf{Q}_v$  enaka nič, je sistem nevodljiv. □

### Vodljivost sistema, ki je zapisan s prenosno funkcijo

Sistem, ki je zapisan s prenosno funkcijo, je vodljiv, če ne vsebuje takih ničel in polov, ki bi se krajšale.

**Primer 4.9** Sistem oz. zvezo med spremenljivko stanja  $x_2(t)$  in vhodnim signalom  $u(t)$  opisuje prenosna funkcija

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{s + 2.5}{s^2 + 1.5s - 2.5} = \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)(s - 1)} \quad (4.181)$$

Isti sistem opisuje v prostoru stanj enačba

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.182)$$

Ker velja

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

in

$$\det(\mathbf{Q}_v) = 0 \quad (4.184)$$

sistem ni vodljiv. □

### Izhodna vodljivost

V regulacijskih sistemih želimo običajno regulirati izhodno (regulirano) veličino. Vodljivost v smislu stanj zato ni zadosten pogoj za izhodno vodljivost. Včasih niti ni nujno, da je sistem vodljiv v smislu stanj, pa je vendarle izhodno vodljiv.

Sistem je izhodno vodljiv, če je možno z neomejenim signalom  $u(t)$  v končnem časovnem intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1$  pripeljati izhod z začetno vrednostjo  $y(t_0)$  v končno vrednost  $y(t_1)$ .

O izhodni vodljivosti odloča izhodna vodljivostna matrika  $\mathbf{Q}_{vi}$

$$\mathbf{Q}_{vi} = [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] \quad (4.185)$$

Sistem z enim izhodom je izhodno vodljiv, če je

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_{vi}) = 1 \quad (4.186)$$

Sistem z  $m$  izhodi je izhodno vodljiv, če je

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_{vi}) = m \quad (4.187)$$

### 4.8.2 Transformacija sistema v vodljivostno kanonično obliko

Sistem, ki ga opisuje enačba

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.188)$$

transformiramo v vodljivostno kanonično obliko s pomočjo transformacijske matrike

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_v \mathbf{W} \quad (4.189)$$

pri čemer je  $\mathbf{Q}_v$  vodljivostna matrika

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.190)$$

$\mathbf{W}$  pa je matrika

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.191)$$

$a_i$  so koeficienti karakterističnega polinoma

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (4.192)$$

Da lahko izvršimo ustrezno transformacijo, mora biti sistem vodljiv.

**Primer 4.10** Transformirajmo sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (4.193)$$

z

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

v vodljivostno kanonično obliko.

Vodljivostna matrika

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad (4.195)$$

ima rang  $(\mathbf{Q}_v) = 2$ , zato je sistem vodljiv. Ker je karakteristični polinom

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 4 & s+3 \end{vmatrix} = (s-1)(s+3) + 4 = s^2 + 2s + 1 = s^2 + a_1s + a_2 \quad (4.196)$$

je matrika  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

in

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_v\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.198)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4.199)$$



Matrike transformiranega sistema so

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformirani sistem ima torej vodljivostno kanonično obliko. □

### 4.8.3 Spoznavnost sistemov

Sistem je spoznaven, če lahko stanje  $\mathbf{x}(t_0)$  določimo s pomočjo opazovanega izhodnega signala  $y(t)$  v končnem časovnem intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Sistem je spoznaven, če vsaka spremenljivka stanja deluje na izhod. Spoznavnost sistema je pomembna takrat, kadar želimo iz merjenega izhoda določiti v čim krajšem možnem času spremenljivke stanja (vse ali samo nekatere).

O spoznavnosti sistema odloča *matrika spoznavnosti*  $\mathbf{Q}_s$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

Sistem je spoznaven, če je rang matrike  $\mathbf{Q}_s$  enak  $n$ , oz. če je matrika  $\mathbf{Q}_s$  sestavljena iz  $n$  linearno neodvisnih vektorjev

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_s) = n \quad (4.202)$$

kjer je  $n$  red sistema. Če ima sistem en izhod, je spoznaven, če je matrika  $\mathbf{Q}_s$  nesingularna

$$\det(\mathbf{Q}_s) \neq 0 \quad (4.203)$$

**Primer 4.11** Ali je sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.204)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (4.205)$$

vodljiv v smislu stanj, izhodov? Ali je spoznaven?

Ker velja

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{Q}_v) \neq 0 \quad (4.206)$$

je sistem v smislu stanj vodljiv.

Ker velja

$$\mathbf{Q}_{vi} = [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rang}(\mathbf{Q}_{vi}) = 1 \quad (4.207)$$

je sistem izhodno vodljiv.

Ker velja

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{Q}_s) \neq 0 \quad (4.208)$$

je sistem spoznaven. □

**Študij spoznavnosti s pomočjo diagonalne oz. Jordanove kanonične oblike**

Če je sistem transformiran v diagonalno kanonično obliko

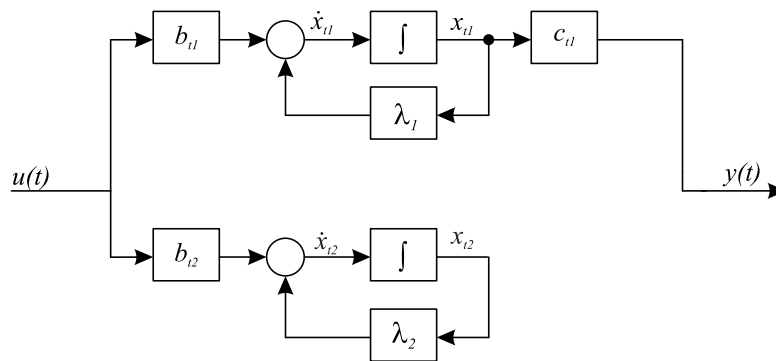
$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_t(t) + \mathbf{B}_t u(t) \quad (4.209)$$

$$y(t) = \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t(t) + D u(t) \quad (4.210)$$

je spoznaven, če matrika  $\mathbf{C}_t$  ne vsebuje kolon s samimi ničlami oz. v primeru sistemov z enim izhodom, če vrstični vektor  $\mathbf{C}_t$  ne vsebuje nobene ničle. Izhodno enačbo namreč lahko zapišemo v obliki

$$y(t) = c_{t1}x_{t1}(t) + c_{t2}x_{t2}(t) + \dots + c_{tn}x_{tn}(t) \quad (4.211)$$

in ker v primeru diagonalne kanonične oblike ni medsebojnih vplivov med stanji, je jasno, da vsa stanja vplivajo na izhode le, če so vsi elementi  $c_{ti}$  različni od nič. Primer nespoznavnega sistema prikazuje slika 4.20.



Slika 4.20: Nespoznaven sistem v diagonalni obliki

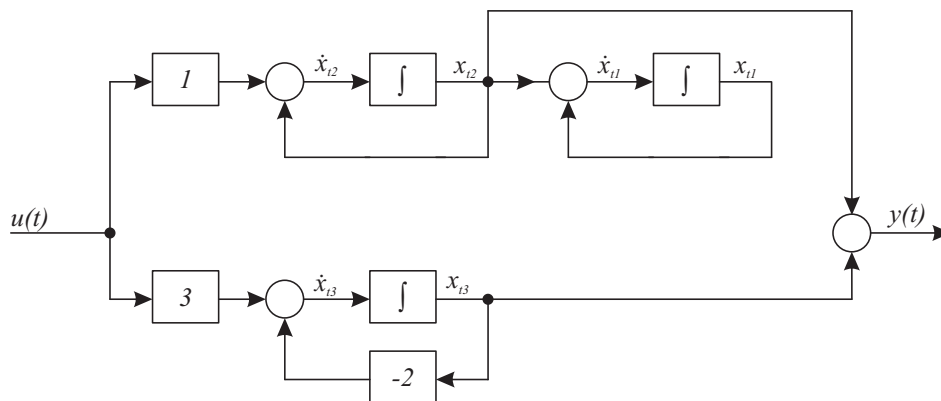
Če vse lastne vrednosti med seboj niso različne, lahko proučujemo spoznavnost s pomočjo Jordanove kanonične oblike. V tem primeru je sistem spoznaven, če kolona v matriki  $\mathbf{C}_t$ , ki pripada prvi vrstici ustreznega Jordanovega bloka, ni enaka nič.

**Primer 4.12** Ali je sistem zapisan v Jordanovi kanonični obliki

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [0 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}_t(t) \quad (4.212)$$

spoznaven?

Sistem ni spoznaven, ker je prva kolona matrike  $\mathbf{C}_t$  enaka nič. Sistem je vodljiv, ker je druga vrstica matrike  $\mathbf{B}_t$  različna od nič. To je razvidno tudi iz ustrezne bločne (simulacijske) sheme na sliki 4.21.



Slika 4.21: Nespoznaven in vodljiv sistem v Jordanovi obliki

Sistem ima

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{vi} = [4 \quad -7 \quad 13 \quad 0] \quad \mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.213)$$

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_v) = 3 \quad \text{rang}(\mathbf{Q}_{vi}) = 1 \quad \text{rang}(\mathbf{Q}_s) = 0 \quad (4.214)$$

torej je vodljiv, izhodno vodljiv, ni pa spoznaven.  $\square$

#### 4.8.4 Transformacija sistema v spoznavnostno kanonično obliko

Sistem, ki ga opisuje enačba

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.215)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \quad (4.216)$$

transformiramo v spoznavnostno kanonično obliko s pomočjo transformacijske matrike

$$\mathbf{T} = (\mathbf{W}\mathbf{Q}_s)^{-1} \quad (4.217)$$

kjer je matrika  $\mathbf{W}$  definirana z enačbama (4.191) in (4.192),  $\mathbf{Q}_s$  pa je spoznavnostna matrika, definirana z enačbo (4.201). Transformacijo je možno narediti le, če je sistem spoznaven.

**Primer 4.13** Transformirajmo sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (4.218)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.219)$$

z

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1] \quad (4.220)$$

v spoznavnostno kanonično obliko.

Spoznavnostna matrika je

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

Sistem je spoznaven, saj je  $\text{rang}(\mathbf{Q}_s) = 2$  oz.  $\det(\mathbf{Q}_s) \neq 0$ .

Ker je karakteristični polinom

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 + 2s + 1 = s^2 + a_1s + a_2 \quad (4.222)$$

je matrika  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.223)$$

in

$$\mathbf{T} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.224)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.225)$$

Matrike transformiranega sistema so

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.226)$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.227)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.228)$$

torej ima transformirani sistem res spoznavnostno obliko.

□

## 5.

## Načrtovanje regulacijskih sistemov v prostoru stanj

Načrtovalne postopke v prostoru stanj smatramo za sodobne postopke. Metode, ki zahtevajo natančno poznavanje modela realnega procesa, je možno učinkovito programirati in uporabljati na digitalnem računalniku.

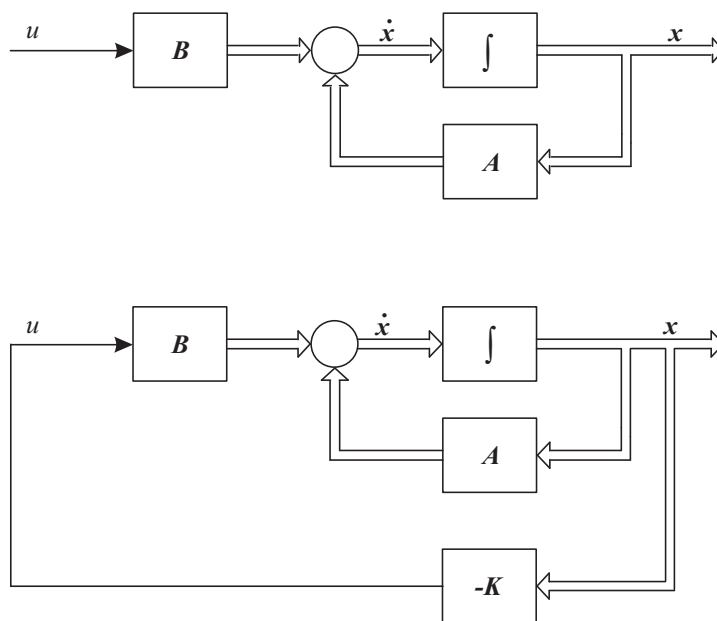
Regulatorje, ki jih načrtujemo v prostoru stanj, imenujemo *regulatorje stanj*. Osnovna ideja je v tem, da regulirno veličino  $\mathbf{u}$  izračunamo iz vektorja stanj  $\mathbf{x}$ . Najpreprostejši in najpogosteje uporabljeni regulator dela po regulacijskem algoritmu

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (5.1)$$

pri čemer je  $\mathbf{K}$  običajno konstantna matrika reda  $r \times n$  ( $r$  vhodov,  $n$  stanj) oz. v primeru univariabilnega sistema konstantni vrstični vektor. Ustrezni odprtozančni in regulacijski sistem v primeru univariabilnega sistema prikazuje slika 5.1.

Osnovni princip regulatorja stanj je, da neko začetno stanje sistema (ki ga je npr. povzročila neka motnja) izregulira v stanje nič na tak način, da so ob tem izpolnjeni določeni kriteriji dobrega reguliranja (primerna hitrost, majhni prevzponi, majhne kvadratične cenilke,...).

Glede na kriterije, po katerih določimo matriko  $\mathbf{K}$ , delimo regulatorje stanj na



Slika 5.1: Odprtozančni in regulacijski sistem z enim vhodom

- regulatorje za premikanje polov ter na
- optimalne kvadratične regulatorje.

*Regulatorji za premikanje polov* zagotovijo želeno lego zaprtozančnih polov, medtem ko *optimalni kvadratični regulatorji* minimizirajo integralsko cenilko, v kateri so vključena stanja sistema in regulirna veličina, npr.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + r \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (5.2)$$

Ker v praksi običajno nekatera stanja niso merljiva, merljivi pa so izhodi sistema, moramo v tem primeru načrtati tudi *observatorje*, ki nam iz merjenih izhodnih signalov rekonstruirajo manjkajoča stanja. Načrtovalni postopki prav tako temeljijo na metodi premikanja polov in na uporabi kvadratične integralske cenilke.

Zaradi večje nazornosti se bomo omejili le na metode premikanja polov.



## 5.1 Regulator za premikanje polov

S pomočjo regulatorja stanj za premikanje polov lahko dosežemo poljubno lego zaprtizančnih polov. Ob tem predpostavimo, da so vsa stanja sistema dostopna in da je sistem vodljiv. Omejili se bomo na sisteme z enim vhodom, saj so postopki v primeru multivariabilnih sistemov dosti bolj zahtevni. Medtem ko je pri sistemih z enim vhodom vrstični vektor  $\mathbf{K}$  natančno določen z lego zelenih polov, je pri multivariabilnih sistemih možno doseči pole tako, da nekatere elemente regulatorja prosto izberemo. S tem lahko izpolnimo tudi morebitne dodatne zahteve v regulacijskem sistemu.

Pri načrtovanju kompenzacijskih regulatorjev smo zagotovili le ustrezno lego dominantnega para, ki je bila določena z  $\zeta$  in  $\omega_n$ , pri regulatorju stanj pa moramo predpisati vse pole. Le-te bomo označili z

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n \quad (5.3)$$

kjer je  $n$  red sistema, t.j. število stanj.

Sistem, ki ga reguliramo, je v prostoru stanj zapisan z enačbo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5.4)$$

regulacijski algoritem pa ima obliko

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (5.5)$$

Če vstavimo enačbo (5.5) v enačbo (5.4), dobimo izraz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) \quad (5.6)$$

Enačba (5.6) je enačba stanj za regulirani sistem. Le-ta ima karakteristični polinom

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \quad (5.7)$$

in časovni odziv na začetno stanje

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})t} \mathbf{x}(0) \quad (5.8)$$

pri čemer je  $\mathbf{x}(0)$  začetni pogoj kot posledica določene motnje. Matrika  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  je *sistemska matrika reguliranega sistema*. Želeni poli  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$  so njene lastne vrednosti. Če je sistem  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$  vodljiv, potem je možno lastne vrednosti  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$  postaviti na poljubna mesta (potreben in zadosten pogoj).

Za določitev regulatorja stanj  $\mathbf{K}$  si bomo ogledali metodo izenačitve dejanskega in želenega karakterističnega polinoma, metodo s pomočjo vodljivostne kanonične oblike in metodo, ki temelji na Ackermann-ovi formuli.

### 5.1.1 Metoda izenačitve dejanskega in želenega karakterističnega polinoma

To metodo je smiselno uporabiti, če je red sistema  $n \leq 3$ . V tem primeru vrstični vektor  $\mathbf{K}$  zapišemo z njegovimi komponentami

$$\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] \quad (5.9)$$

Če vstavimo enačbo (5.9) v karakteristični polinom

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \quad (5.10)$$

in le-tega izenačimo z želenim karakterističnim polinomom

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \dots (s - \mu_n) \quad (5.11)$$

dobimo enačbo

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \dots (s - \mu_n) \quad (5.12)$$

Obe strani enačbe zapišemo v polinomski obliki. S primerjavo ustreznih členov dobimo  $n$  enačb z  $n$  neznankami  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ .

**Primer 5.1** Za proces

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (5.13)$$

z

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

je potrebno določiti regulator stanj, ki zagotovi

$$\begin{aligned} \zeta &= 0.6 \\ \omega_n &= 3 \text{rds}^{-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

oz. lego polov

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -1.8 + j2.4 \\ \mu_2 &= -1.8 - j2.4 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ker je karakteristična enačba procesa

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = 0 \quad (5.17)$$

sta pola pri  $s = 4.539$  in  $s = -4.539$ , torej je sistem nestabilen. Ker ima proces dve stanji, je vektor  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] \quad (5.18)$$

Karakteristični polinom sistema je torej

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right| = \\ &= \left| \begin{array}{cc} s & -1 \\ -20.6 + k_1 & s + k_2 \end{array} \right| = s^2 + k_2s - 20.6 + k_1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Želeni karakteristični polinom pa je

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 1.8 - j2.4)(s + 1.8 + j2.4) = s^2 + 3.6s + 9 \quad (5.20)$$

Z izenačitvijo desnih strani enačb (5.19) in (5.20) določimo enačbo

$$s^2 + k_2s - 20.6 + k_1 = s^2 + 3.6s + 9 \quad (5.21)$$

iz katere določimo  $k_1 = 29.6$ ,  $k_2 = 3.6$ , oz. regulator stanj

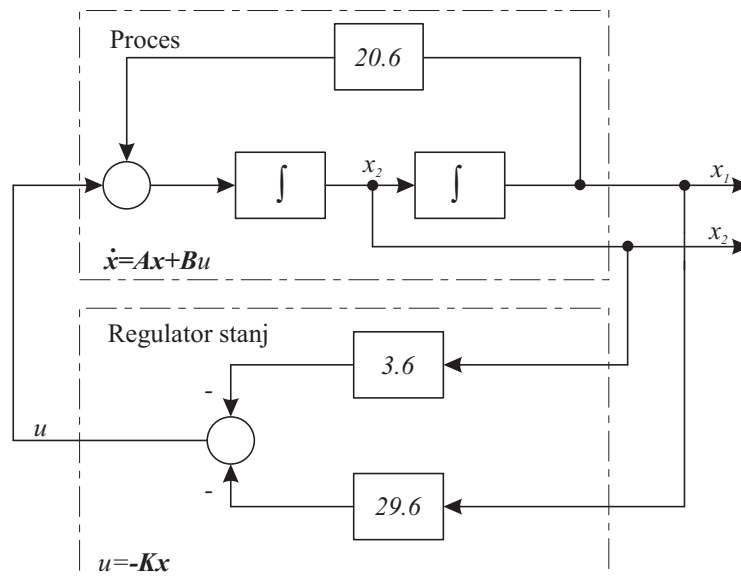
$$\mathbf{K} = [29.6 \quad 3.6] \quad (5.22)$$

Bločno shemo reguliranega sistema prikazuje slika 5.2.

□

### 5.1.2 Metoda s pomočjo vodljivostne kanonične oblike

Če ima sistem vodljivostno kanonično obliko



Slika 5.2: Realizacija regulatorja stanj za premikanje polov

$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.23)$$

potem je sistemska matrika reguliranega sistema pri uporabi regulatorja stanj  $\mathbf{A}_t - \mathbf{B}_t \mathbf{K}_t$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_t - \mathbf{B}_t \mathbf{K}_t = & (5.24) \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n - k_{t1} & -a_{n-1} - k_{t2} & -a_{n-2} - k_{t3} & & -a_2 - k_{tn-1} & -a_1 - k_{tn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oz. karakteristični polinom

$$s^n + (a_1 + k_{tn})s^{n-1} + (a_2 + k_{tn-1})s^{n-2} + \dots + (a_{n-1} + k_{t2})s + (a_n + k_{t1}) \quad (5.25)$$

Le-tega izenačimo z želenim karakterističnim polinomom

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (5.26)$$

S primerjavo izraza (5.25) in desne strani enačbe (5.26) izračunamo komponente regulatorja stanj  $\mathbf{K}_t$

$$\begin{aligned} k_{t1} &= \alpha_n - a_n \\ k_{t2} &= \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ &\vdots \\ k_{tn} &= \alpha_1 - a_1 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Če je model sistema zapisan v vodljivostni obliki, določimo regulator stanj neposredno iz koeficientov želenega zaprtozančnega karakterističnega polinoma in odprtozančnega karakterističnega polinoma.

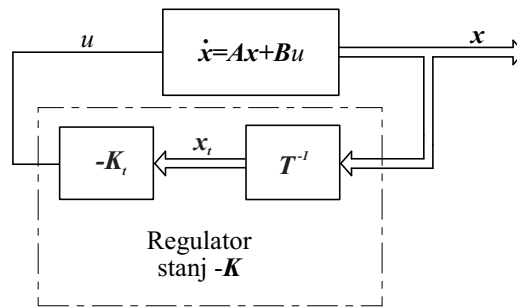
Pri reguliranju nekega realnega procesa smo vezani na tiste spremenljivke stanj, ki so merljive. To pa ponavadi niso spremenljivke, ki bi pripadale vodljivostni kanonični obliki, ampak neki splošni obliki

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5.28)$$

Zato je potrebno merljiva stanja  $\mathbf{x}(t)$  transformirati v stanja, ki pripadajo vodljivostni obliki  $\mathbf{x}_t(t)$

$$\mathbf{x}_t(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (5.29)$$

le-ta pa predstavljajo vhod v regulator stanj  $\mathbf{K}_t$ , ki ga načrtamo za vodljivostno kanonično obliko. Ustrezno realizacijo prikazuje slika 5.3.



Slika 5.3: Regulator stanj

Celotni regulator stanj je torej določen z enačbo

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_t \mathbf{T}^{-1} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad (5.30)$$

Enačba (5.30) je splošno uporabna. Če merjena stanja pripadajo vodljivostni kanonični obliki, je transformacijska matrika  $\mathbf{T}$  enaka enotini matriki  $\mathbf{I}$ .

**Primer 5.2** Za enak proces kot v primeru 5.1 načrtajmo regulator stanj za premikanje polov s pomočjo metode, ki izhaja iz zapisa sistema v vodljivostni kanonični obliki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Ker je proces že v vodljivostni kanonični obliki, je ustrezna transformacijska matrika kar enotina matrika  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ . Z upoštevanjem enačbe (5.30) je regulator

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_t \mathbf{T}^{-1} = [\alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{I}^{-1} = [\alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] \quad (5.32)$$

$a_1$  in  $a_2$  sta koeficienta karakterističnega polinoma procesa

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_2 \quad (5.33)$$

Torej je  $a_1 = 0$  in  $a_2 = -20.6$ .  $\alpha_1$  in  $\alpha_2$  pa sta koeficienta zelenega polinoma

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 3.6s + 9 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 \quad (5.34)$$

Torej je  $\alpha_1 = 3.6$  in  $\alpha_2 = 9$ , regulator pa je

$$\mathbf{K} = [\alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] = [29.6 \quad 3.6] \quad (5.35)$$

kar je enako, kot v primeru 5.1. □

### 5.1.3 Metoda s pomočjo Ackermann-ove formule

Z uporabo *Ackermann-ove formule* izračunamo regulator stanj za premikanje polov s pomočjo enačbe

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_v^{-1} \Phi(\mathbf{A}) \quad (5.36)$$

kjer je  $\mathbf{Q}_v$  vodljivostna matrika,  $\mathbf{A}$  sistemska matrika,  $\Phi$  pa funkcija, ki določa želeni karakteristični polinom

$$\Phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n \quad (5.37)$$

Izhodišče izpeljave je Cayley-Hamilton-ov teorem, ki pravi, da matrika  $\mathbf{A}$  zadovoljuje lastno karakteristično enačbo ( $\Phi(s) = 0$ ,  $\Phi(\mathbf{A}) = 0$ ).

**Primer 5.3** Za isti sistem kot v primerih 5.1 in 5.2 načrtajmo regulator stanj za premikanje polov s pomočjo Ackermann-ove formule.

Regulator izračunamo s pomočjo enačbe (5.36). Matrika vodljivosti  $\mathbf{Q}_v$  je

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$



S tem se tudi prepričamo, da je sistem vodljiv ( $\text{rang}(\mathbf{Q}_v) = 2$ ), kar omogoča poljubno postavitve polov. Že v prejšnjih primerih smo izvedli želeni karakteristični polinom, ki je

$$\Phi(s) = s^2 + 3.6s + 9 \quad (5.39)$$

Zato je  $\Phi(\mathbf{A})$

$$\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3.6\mathbf{A} + 9\mathbf{I} = \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} + 3.6 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in regulator  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

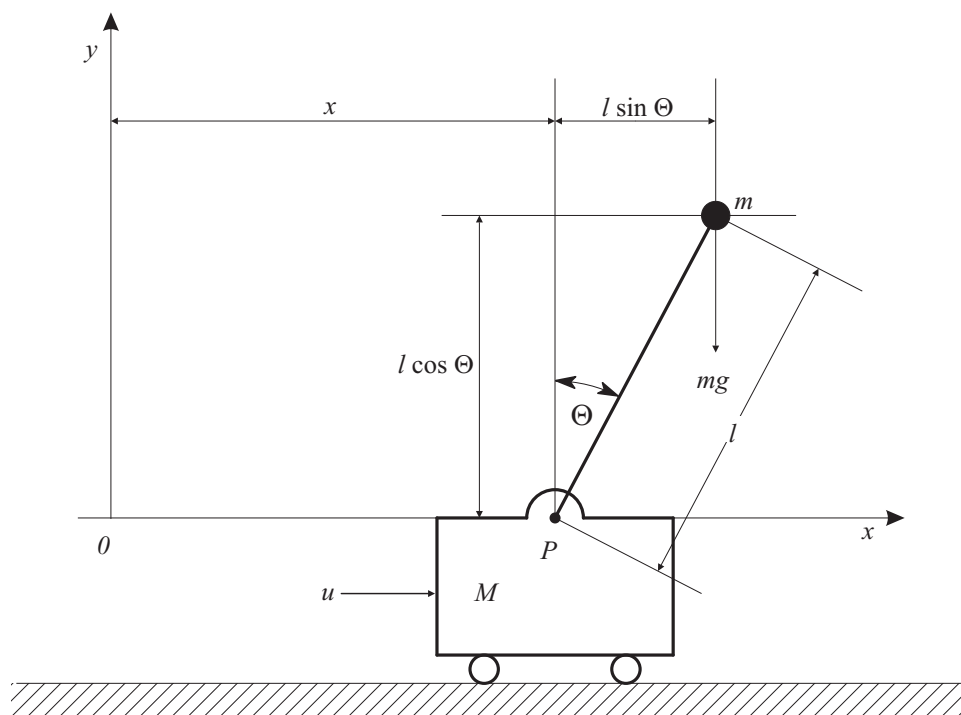
□

Torej smo dobili enak rezultat kot v primerih 5.1 in 5.2.

**Primer 5.4** Slika 5.4 prikazuje invertirano nihalo, ki je pritrjeno na vozičku. Z ustreznimi pomiki vozička lahko dosežemo, da ostane nihalo v navpični legi. V ta namen želimo načrtati regulator stanj.

Vektor stanj je

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$



Slika 5.4: Invertirano nihalo

$M$  je masa vozička,  $m$  je masa nihala,  $l$  je dolžina nihala in  $g$  je gravitacijski pospešek. Spremenljivke stanj so zasuk nihala  $\Theta$  in njegov odvod  $\dot{\Theta}$  (kotna hitrost) v točki  $P$ , ter pomik vozička  $x$  in njegov odvod  $\dot{x}$  (hitrost) v smeri  $x$ . Vhod v sistem je sila  $u(t)$ , ki deluje na voziček, izhoda iz sistema pa sta zasuk  $\Theta(t)$  in pomik  $x(t)$ .

Linearizirani matematični model je v prostoru stanj podan z matrikami

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= 0
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Potrebno je načrtati regulator, ki bo držal invertirano nihalo v navpičnem položaju kljub morebitnim motnjam z ustreznim pomikanjem vozička preko sile

*u.* Regulator stanj naj zagotovi dominantna pola z

$$\begin{aligned}\zeta &= 0.5 \text{ in} \\ \omega_n &= 4 \text{ rds}^{-1}\end{aligned}\tag{5.44}$$

Parametri invertiranega nihala so naslednji:

$$M = 2kg \quad m = 0.1kg \quad l = 0.5m \quad g = 9.81ms^{-2}\tag{5.45}$$

Matrike sistema so

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\tag{5.46}$$

Karakteristični polinom sistema je

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^4 - 20.601s^2 = s^2(s + 4.539)(s - 4.539) = s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4\tag{5.47}$$

Torej so koeficienti karakterističnega polinoma odprtozančnega sistema

$$a_1 = 0 \quad a_2 = -20.601 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 0\tag{5.48}$$

Odprtozančni sistem je nestabilen, kar je razumljivo, saj vsaka najmanjša motnja povzroči, da nihalo pade iz morebitne ravnovesne lege.

Ker ima vodljivostna matrika

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}\tag{5.49}$$

$\text{rang}(\mathbf{Q}_v) = 4$ , je sistem vodljiv in je možno doseči poljubno lego polov. Zahteve po  $\zeta$  in  $\omega_n$  dominantnega para izpolnimo z lego polov

$$\mu_1 = -2 + j3.464 \quad \mu_2 = -2 - j3.464 \quad \mu_3 = -10 \quad \mu_4 = -10 \quad (5.50)$$

$\mu_1$  in  $\mu_2$  predstavljata dominantni par za doseg predpisanega  $\zeta$  in  $\omega_n$ ,  $\mu_3$  in  $\mu_4$  pa sta bolj oddaljena in ne vplivata bistveno na delovanje. Torej je želeni karakteristični polinom zaprtozančnega sistema

$$\begin{aligned} \Phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) &= s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600 = \\ &= s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4 \end{aligned} \quad (5.51)$$

in njegovi koeficienti

$$\alpha_1 = 24 \quad \alpha_2 = 196 \quad \alpha_3 = 720 \quad \alpha_4 = 1600 \quad (5.52)$$

Matrika  $\mathbf{W}$ , ki jo potrebujemo za izračun transformacijske matrike  $\mathbf{T}$  za pretvorbo v vodljivostno kanonično obliko, je

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -20.601 & 0 & 1 \\ -20.601 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

transformacijska matrika  $\mathbf{T}$  in njena invertirana vrednost pa sta

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_v \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -9.81 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -9.81 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0510 & 0 & -0.1019 & 0 \\ 0 & -0.0510 & 0 & -0.1019 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

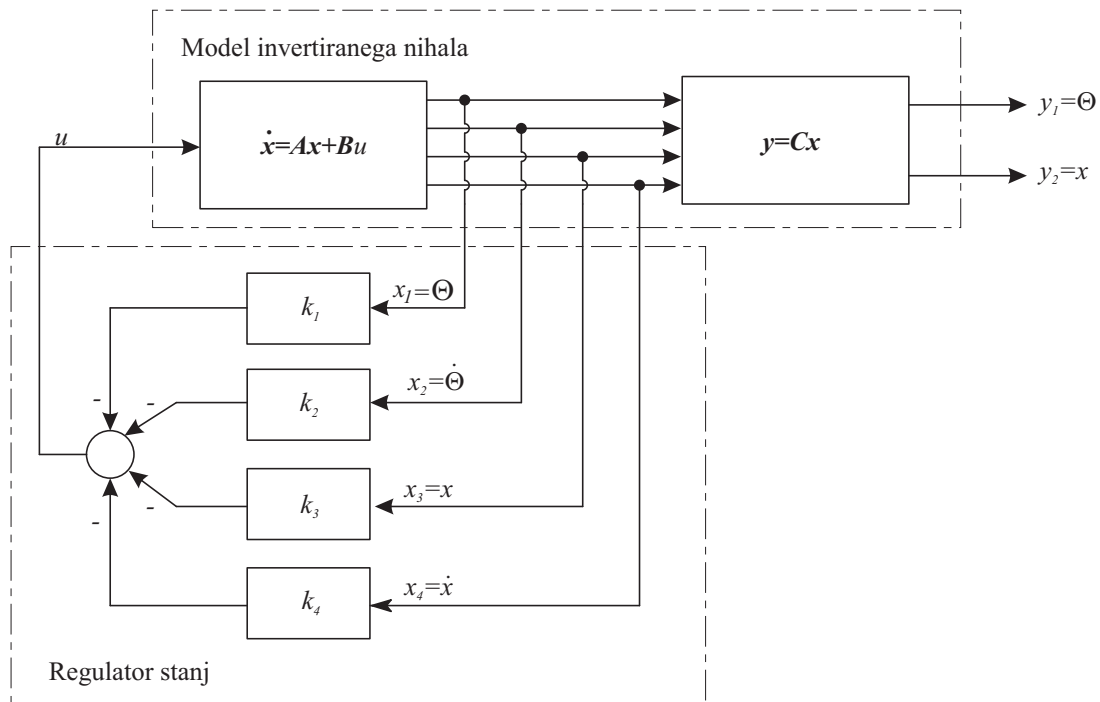
Regulator določimo po enačbi (5.30)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= [\alpha_4 - a_4 \quad \alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} = \\
 &= [1600 - 0 \quad 720 - 0 \quad 196 + 20.601 \quad 24 - 0] \mathbf{T}^{-1} = \\
 &= [-298.15 \quad -60.697 \quad -163.099 \quad -73.394]
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Regulirni signal (silo) podaja enačba

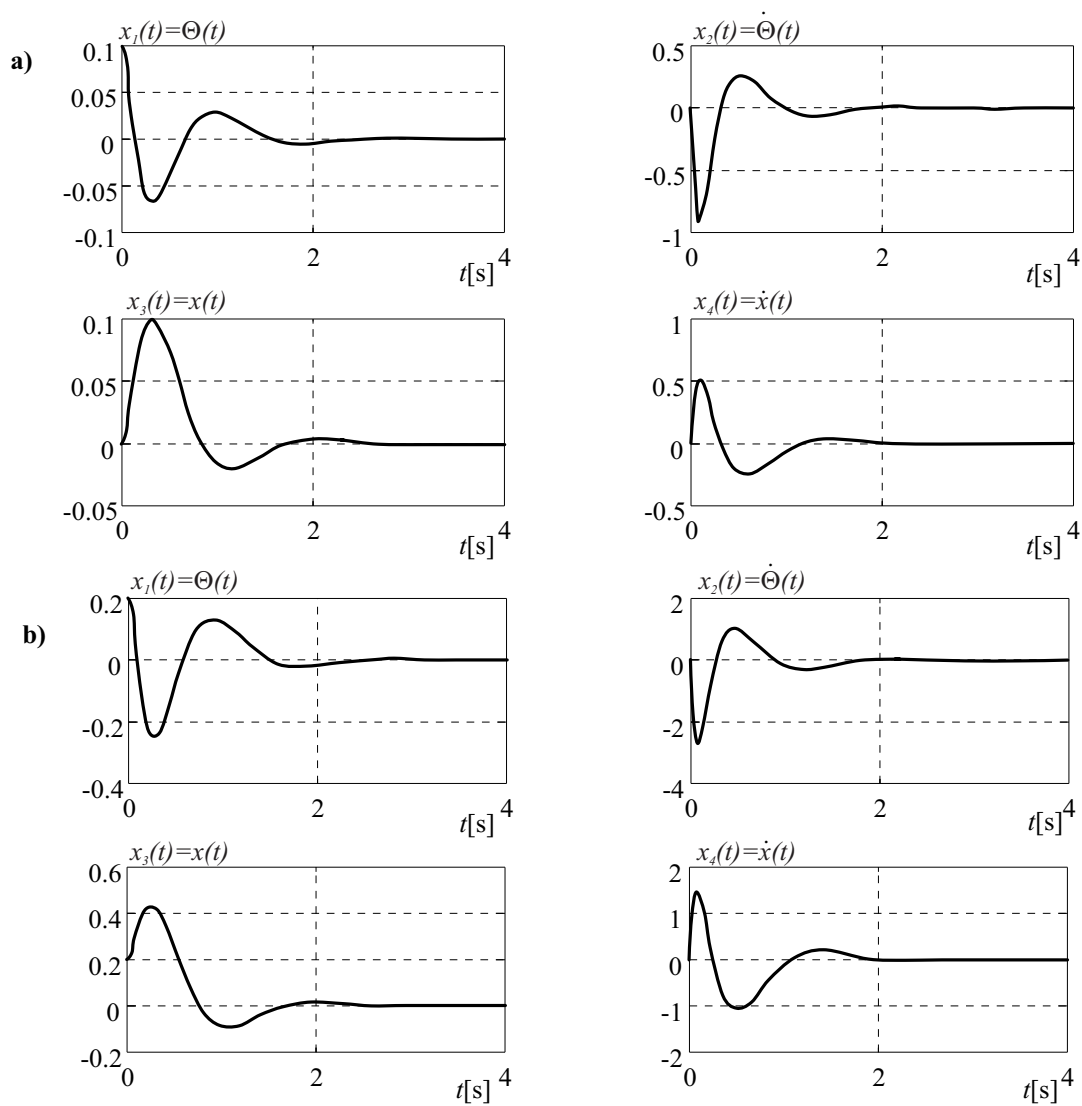
$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 298.15x_1(t) + 60.697x_2(t) + 163.099x_3(t) + 73.394x_4(t) \tag{5.57}$$

Bločno shemo reguliranega sistema prikazuje slika 5.5. Slika 5.6a prikazuje



Slika 5.5: Regulacija invertiranega nihala

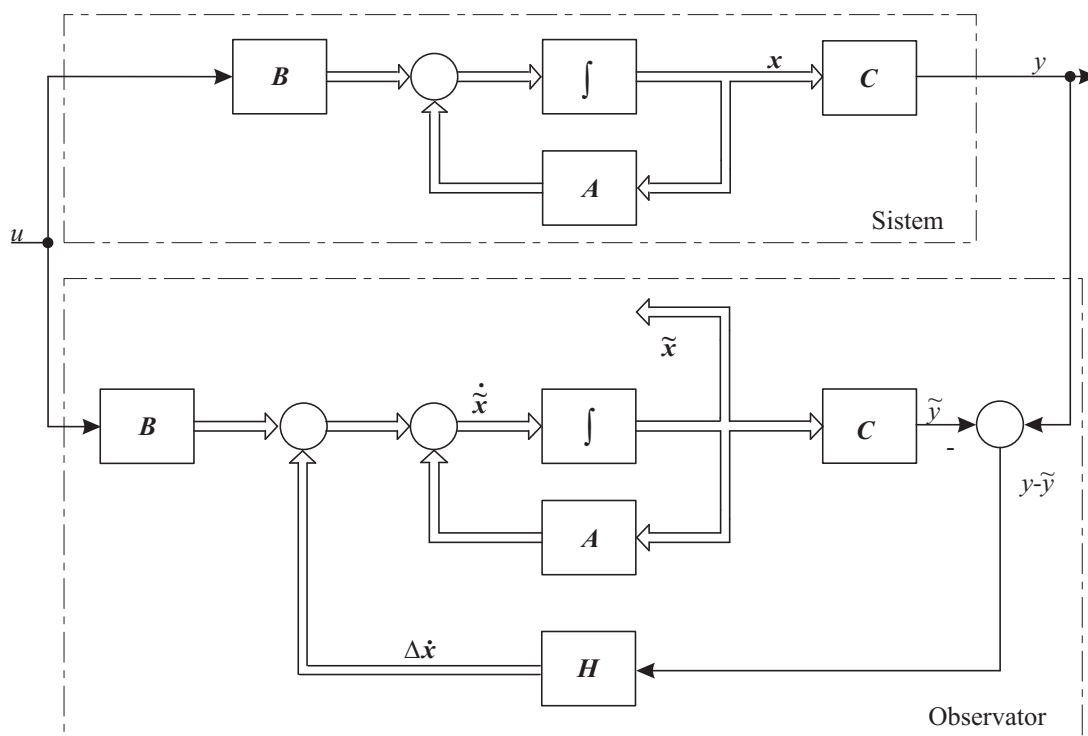
časovne poteke spremenljivk stanj in izhodnih signalov regulacijskega sistema pri motnji  $\Theta(0) = 0.1rd$ , slika 5.6b pa pri motnjah  $\Theta(0) = 0.2rd$ ,  $x(0) = 0.2m$ . V prvem primeru je motnja začetni odmik nihala, v drugem primeru pa sta motnji začetni odmik nihala in začetni premik vozička. Vidimo, da regulator približno v 2s izregulira motnje in vzpostavi ravnotežno stanje.  $\square$

Slika 5.6: Regulacija invertiranega nihala a)  $\Theta(0) = 0.1 \text{ rad}$ b)  $\Theta(0) = 0.2 \text{ rad}, x(0) = 0.2 \text{ m}$

## 5.2 Observator stanj

Pri regulatorju stanj smo predpostavili, da so vsa stanja sistema merljiva. V praksi pa so merljiva le nekatera stanja oz. izhodi iz sistema, ki so linearna kombinacija določenih stanj. Zato je pri uporabi regulatorja stanj potrebno načrtati t.i. observator, ki s pomočjo vhodnega in izhodnega signala rekonstruira vsa stanja (*observator polnega reda*), ali pa le minimalno število manjkajočih stanj (*observator minimalnega reda*). Observatorji predstavljajo pomembne gradnike modernih, računalniško realiziranih sistemov vodenja.

Osnovni princip realizacije observatorja polnega reda prikazuje slika 5.7.



Slika 5.7: Osnovni princip realizacije observatorja polnega reda

Paralelno sistemu (realnemu procesu) je priključen model sistema. V idealnem primeru lahko prevzamemo, da sta proces in model podana z matrikami  $A$ ,  $B$  in  $C$ . Paralelni model je bistveni del observatorja in ima enak vhodni signal kot sistem. Stanja observatorja so označena z  $\tilde{x}(t)$ , izhod pa z  $\tilde{y}(t)$  in predstavljajo oceno ustreznih signalov sistema.

Bistvo delovanja je v tem, da se izračuna pogrešek med izhodom sistema in modela v observatorju. Ta pogrešek se množi z matriko observatorja  $\mathbf{H}$ , produkt  $\mathbf{H}(y - \tilde{y})$  pa deluje na odvod ocenjenih spremenljivk stanj  $\tilde{\mathbf{x}}$  tako, da zmanjšuje pogrešek. Stanja, ki jih rekonstruira observator, so torej dana z enačbo

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{H}(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \quad (5.58)$$

Dodatna povratna zanka s  $\mathbf{H}$  do neke mere zmanjšuje tudi vplive neujemanja sistema in njegovega modela.

Napaka v oceni stanj je podana z izrazom

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (5.59)$$

Ker velja

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{H}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (5.60)$$

je enačba stanj, ki opisuje dinamiko pogreška

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (5.61)$$

Vidimo, da je dinamika pogreška pogojena z lastnimi vrednostmi matrike  $\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$ . Če imajo le-te negativne realne dele, gre pogrešek  $\mathbf{e}(t)$  proti nič ne glede na začetne pogoje  $\mathbf{x}(0)$  in  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ . Z izbiro ustreznih lastnih vrednosti (polov observatorja) lahko dosežemo tudi želen (hiter) potek pogreška proti nič. Te lastne vrednosti označimo z  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ . Velja torej

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C}) = (s - \nu_1)(s - \nu_2) \dots (s - \nu_n) \quad (5.62)$$

Potreben in zadosten pogoj za določitev observatorjeve matrike  $\mathbf{H}$ , ki zagotovi želene lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$  je, da je sistem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ ,  $y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$  spoznaven.



Za določitev observatorja  $\mathbf{H}$  si bomo ogledali metodo, ki temelji na izenačitvi dejanskega in želenega karakterističnega polinoma, metodo s pomočjo spoznavnostne kanonične oblike in metodo, ki temelji na Ackermann-ovi formuli.

### 5.2.1 Metoda izenačitve dejanskega in želenega karakterističnega polinoma

Način je primeren za rede sistemov  $n \leq 3$ . Matriko  $\mathbf{H}$  zapišemo v primeru sistemov z enim izhodom v obliki stolpnega vektorja

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Ta zapis vstavimo v enačbo (5.62). Z izenačitvijo ustreznih elementov določimo matriko  $\mathbf{H}$ .

**Primer 5.5** Za sistem, ki ga opisujejo matrike

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1] \quad (5.64)$$

je potrebno načrtati observator polnega reda, tako da bo dinamika pogreška določena z

$$\begin{aligned} \zeta &= 0.6 \\ \omega_n &= 3 \text{ rds}^{-1} \end{aligned} \quad (5.65)$$

oz. z lastnimi vrednostmi

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -1.8 + j2.4 \\ \nu_2 &= -1.8 - j2.4 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Ker ima sistem dve stanji, je matrika observatorja

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

karakteristični polinom observatorja pa je

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C}) &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \begin{vmatrix} s & -20.6 + h_1 \\ -1 & s + h_2 \end{vmatrix} = s^2 + h_2s - 20.6 + h_1 \end{aligned} \quad (5.68)$$

Želeni polinom je

$$(s - \nu_1)(s - \nu_2) = s^2 + 3.6s + 9 \quad (5.69)$$

S primerjavo izračunamo  $h_1 = 29.6$ ,  $h_2 = 3.6$  in matriko observatorja

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

□

### 5.2.2 Metoda s pomočjo spoznavnostne kanonične oblike

Če je model sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t u \\ y &= \mathbf{C}_t \mathbf{x} + Du \end{aligned} \quad (5.71)$$

v spoznavnostni kanonični obliki

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_t = [0 \quad 0 \dots \quad 1] \quad (5.72)$$

potem ima matrika  $\mathbf{A}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{C}_t$  obliko

$$\mathbf{A}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n - h_{t1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} - h_{t2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 - h_{tn-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 - h_{tn} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

oz. karakteristični polinom

$$s^n + (a_1 + h_{tn})s^{n-1} + (a_2 + h_{tn-1})s^{n-2} + \dots + (a_{n-1} + h_{t2})s + (a_n + h_{t1}) \quad (5.74)$$

ki ga izenačimo z želenim polinomom

$$(s - \nu_1)(s - \nu_2) \dots (s - \nu_n) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n \quad (5.75)$$

Torej so komponente vektorja observatorja  $\mathbf{H}_t$

$$\begin{aligned} h_{t1} &= \beta_n - a_n \\ h_{t2} &= \beta_{n-1} - a_{n-1} \\ &\vdots \\ h_{tn} &= \beta_1 - a_1 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Če model, ki je vključen v observator, ni v spoznavnostni obliki, pri tem pa je bil observator načrtan s pomočjo spoznavnostne oblike, potem potrebujemo transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$ , ki prevede poljubno obliko v spoznavnostno kanonično

obliko. Ker v tem primeru popravek observatorja ni  $\Delta\dot{\mathbf{x}}$  ampak  $\Delta\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{H}_t(y - \tilde{y})$ , je potrebno vključiti še transformacijsko matriko

$$\mathbf{T}\Delta\dot{\mathbf{x}}_t = \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{H}_t(y - \tilde{y}) = \mathbf{H}(y - \tilde{y}) \quad (5.77)$$

Torej je matrika observatorja

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}\mathbf{H}_t = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \beta_n - a_n \\ \beta_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

**Primer 5.6** Za enak sistem kot v primeru 5.5 načrtajmo observator stanj s pomočjo metode, ki izhaja iz zapisa sistema v spoznavnostni kanonični obliki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1] \quad (5.79)$$

Ker je sistem že v spoznavnostni kanonični obliki, je ustrezna transformacijska matrika  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ . Z upoštevanjem enačbe (5.78) je matrika observatorja

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}\mathbf{H}_t = \mathbf{I} \begin{bmatrix} \beta_2 - a_2 \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 - a_2 \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

$a_1$  in  $a_2$  sta koeficienta karakterističnega polinoma odprtozančnega sistema

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1s + a_2 \quad (5.81)$$

Torej je  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -20.6$ .

$\beta_1$  in  $\beta_2$  sta koeficienta zelenega polinoma

$$(s - \nu_1)(s - \nu_2) = s^2 + 3.6s + 9 = s^2 + \beta_1s + \beta_2 \quad (5.82)$$

Torej je  $\beta_1 = 3.6$ ,  $\beta_2 = 9$ , matrika observatorja pa je

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 9 + 20.6 \\ 3.6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Rezultat je enak kot v primeru 5.5. □

### 5.2.3 Metoda s pomočjo Ackermann-ove formule

Z uporabo Ackermann-ove formule izračunamo matriko observatorja

$$\mathbf{H} = \Psi(\mathbf{A})\mathbf{Q}_s^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

kjer je  $\mathbf{Q}_s$  spoznavnostna matrika,  $\mathbf{A}$  sistemska matrika,  $\Psi$  pa funkcija, ki določa želeni karakteristični polinom

$$\Psi(s) = (s - \nu_1)(s - \nu_2) \dots (s - \nu_n) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n \quad (5.85)$$

**Primer 5.7** Za isti sistem kot v primerih 5.5 in 5.6 načrtajmo observator z uporabo Ackermann-ove formule.

Observator določimo s pomočjo enačbe (5.84). Matrika spoznavnosti je

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

S tem se tudi prepričamo, da je sistem spoznaven in da je možna poljubna postavitev lastnih vrednosti observatorja, saj je  $\text{rang}(\mathbf{Q}_s) = 2$ . Ker je

$$\Psi(s) = s^2 + 3.6s + 9 \quad (5.87)$$

je

$$\Psi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3.6\mathbf{A} + 9\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 29.6 & 74.16 \\ 3.6 & 29.6 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

in ustrezna matrika observatorja

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 29.6 & 74.16 \\ 3.6 & 29.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

kar je enako, kot v primerih 5.5 in 5.6.

□

## Literatura

Borrie, J.A. (1986): *Modern Control Systems: A Manual of Design Methods*, Prentice Hall, Inc., London, UK

Cook, P.A. (1986): *Nonlinear Dynamical Systems*, Prentice Hall, Inc., London, UK

D'Azzo, J.J., C.H. Houpis (1975): *Linear Control System Analysis and Design – Conventional and Modern*, McGraw-Hill, Inc., New York, USA

DiStefano, J.J., Stubberud, I.J. Williams (1976): *Feedback and Control Systems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, USA

Dorf, R.C, R.H. Bishop (2008): *Modern Control Systems*, Eleventh edition, Prentice Hall, USA

Doyle C., B.A. Francis, A.R. Tannenbaum (1992): *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, USA

El – Hawary, M.E. (1984): *Control System Engineering*, Reston Publishing Company, Inc., A Prentice-Hall Company, Reston, Virginia, USA

Franklin, G.F., J.D. Powell, A.E. Naeini (2009): *Feedback Control of Dynamic Systems*, Six edition, Prentice Hall, USA

Golten, J., Verwer, A.: (1991): *Control System Design and Simulation*, McGraw-Hill Book Company, London, UK

Karba, R. (1994): *Gradniki sistemov vodenja*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Univerza v Ljubljani, SLO

Kuljača, L., Z. Vukić (1985): *Automatsko upravljanje sistemima – analiza linearnih sistema*, Školska knjiga, Zagreb, HR

Kuo, B.C., F. Golnaraghi (2010): *Automatic Control Systems*, Eighth edition, John Wiley & Sons, USA

Matko, D., B. Zupančič, R. Karba (1992): *Simulation and Modelling of Continuous Systems - A Case Study Approach*, Prentice Hall, Inc., UK

McMillan, G.K. (1990): *Tuning and Control Loop Performance – A Practitioner's Guide (2<sup>nd</sup> ed.)*, Instrument Society of America, NC., USA

Morari, M., Zafiriou, E. (1989): *Robust process control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA

Ogata, K. (2010): *Modern Control Engineering*, Fifth edition, Prentice Hall, USA

*PC – MATLAB<sup>TM</sup> for MS-DOS personal computers*, The Math Works Inc., South Natick, Massachusetts, USA (1989)

Polonyi, M.J.G. (1991): *Power and Process Control Systems*, McGraw-Hill, Inc., New York, USA

*Problem Solver in Automatic Control Systems/Robotics*, Staff of Research and Education Association, New York, USA (1982)

Raven, F.H. (1978): *Automatic Control Engineering*, McGraw-Hill, Inc., New York, USA

Saucedo, R., E.E. Schiring (1968): *Introduction to Continuous and Digital Control Systems*, The Macmillan Company, New York, USA

Shearer, J.L., B.T. Kulakowski (1990): *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, USA

Shinners, S.M. (1978): *Modern Control System Theory and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA

Shinners, S.M. (1992): *Modern Control System Theory and Design*, John Wiley & Sons, New York, USA

Shinskey, F.G. (1988): *Process Control Systems – Application, Design and Adjustment*, McGraw-Hill, New York, USA

Singh, M.G., J.P. Elloy, R. Mezencev, N. Munro (1980): *Applied Industrial Control – An Introduction*, International Series on Systems and Control, vol. 1, Pergamon Press, Oxford, UK

Stojić, M.R. (1973): *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Građevinska knjiga, Beograd, YU

Strmčnik, S., R. Hanus, D. Juričić, R. Karba, Z. Marinšek, D. Murray-Smith, H. Verbruggen, B. Zupančič (1998): *Celostni pristop k računalniškemu vodenju procesov*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, SLO

Šega, P. (1988): *Regulacije in sistemi*, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, SLO



- Šurina, T. (1981): *Automatska regulacija*, Školska knjiga, Zagreb, HR
- Weber, T.W. (1973): *An Introduction to Process Dynamics and Control*, John Willey & Sons, New York, USA
- Zupančič, B. (1992a): *SIMCOS – jezik za simulacijo zveznih in diskretnih dinamičnih sistemov*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Univerza v Ljubljani, SLO
- Zupančič, B. (2010): *Simulacija dinamičnih sistemov*, Založba Fakultete za elektrotehniko in Fakultete za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani, SLO
- Zupančič, B. (2010): *Zvezni regulacijski sistemi, I.del*, Založba Fakultete za elektrotehniko in Fakultete za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani, SLO





Učbenik **Zvezni regulacijski sistemi - II. del** je nadaljevanje tematike učbenika *Zvezni regulacijski sistemi - I. del* in je namenjen vsem, ki bi radi osvojili temeljna znanja iz področja regulacij, v prvi vrsti pa seveda študentom Avtomatike na FER. Tematika je razdeljena na pet poglavij. Prvo poglavje obravnava analizo regulacijskih sistemov s pomočjo diagrama lege korenov. Drugo poglavje obravnava metode, ki zahtevajo poznavanje frekvenčne karakteristike. V tretjem poglavju obravnavamo prehitevalne, zakasnilne in prehitevalno - zakasnilne kompenzacijske metode za načrtovanje regulacijskih sistemov. Četrto poglavje opisuje analizo sistemov v prostoru stanj, v petem poglavju pa obravnavamo nekatere metode za načrtovanje regulatorjev stanj in observatorjev.

Regulacija, diagram lege korenov, frekvenčne metode, kompenzacija, regulator stanj, observator.

Borut Zupančič je redni profesor na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani, predstojnik Laboratorija za modeliranje, simulacijo in vodenje in predstojnik Katedre za sisteme, avtomatiko in kibernetiko. V letih 2004-2007 je bil predsednik evropske federacije EUROSIM, v letih 2010-2013 pa je njen sekretar. Predava predmete iz področja modeliranja, simulacije in vodenja procesov na dodiplomskem in podiplomskem študiju. Raziskovalno se ukvarja z modeliranjem in vodenjem hibridnih sistemov, z več domenskim objektno orientiranim modeliranjem, ter z modeliranjem, simulacijo in vodenjem toplotnih in svetlobnih tokov v stavbah in v drugih termičnih procesih. Za rezultate na področju računalniško podprtega načrtovanja sistemov vodenja prejel nagrado sklada Borisa Kidriča. Je avtor približno 200 domačih in mednarodnih konferenčnih prispevkov ter 50 člankov v revijah.

ISBN 978-961-243-163-1



**ZVEZNI  
REGULACIJSKI  
SISTEMI  
2. del**

**KLJUČNA GESLA**

**B. ZUPANČIČ**

**ZALOŽBA  
FAKULTETE ZA  
ELEKTROTEHNIKO  
in  
FAKULTETE ZA  
RAČUNALNIŠTVO  
IN INFORMATIKO**